

Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

La Transformada de Fourier

Caracterización frecuencial de señales y sistemas LIT analógicos

José A. López-Salcedo
23/09/2020

Índice

Introducción	6
Objetivos.....	7
1. De la Transformada de Laplace a la Transformada de Fourier	8
1.1. Ecuaciones de análisis y de síntesis de la Transformada de Fourier	8
1.2. Consideraciones acerca de la variable frecuencia	10
1.3. Representación gráfica de la Transformada de Fourier	11
1.4. Condición de existencia de la Transformada de Fourier	14
1.5. Cálculo de transformadas de Fourier de algunas señales básicas	16
1.5.1. Señal delta de Dirac.....	16
1.5.2. Producto de señal exponencial por señal escalón unitario.....	17
1.5.3. Señal pulso cuadrado	18
2. Propiedades de la Transformada de Fourier	20
2.1. Propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier	20
2.1.1. Linealidad	20
2.1.2. Desplazamiento en el dominio temporal (o retardo)	21
2.1.3. Escalado temporal.....	23
2.1.4. Derivación en el dominio temporal.....	23
2.1.5. Integración en el dominio temporal.....	23
2.1.6. Dualidad	24
2.1.7. Desplazamiento en el dominio frecuencial	27
2.1.8. Convolución.....	27
2.1.9. Modulación	29
2.1.10. Teorema de Parseval	29
2.2. Simetría de la Transformada de Fourier	30
2.2.1. Simetría hermítica para señales reales	30
2.2.2. Simetría antihermítica para señales imaginarias	31
2.2.3. Conjugación.....	31
2.2.4. Paridad	31
3. Consideraciones asintóticas de la Transformada de Fourier	33
3.1. Decaimiento en frecuencia	33
3.2. El fenómeno de Gibbs	35
4. Transformada de Fourier de señales periódicas.....	38
4.1. Interpretación de señales periódicas como repetición de una señal aperiódica	38
4.2. Relación entre la Transformada de Fourier y la Serie de Fourier	41
5. Resumen de resultados y propiedades de la transformada de Fourier.....	45

5.1.	Tabla-resumen de transformadas de Fourier de señales típicas	45
5.2.	Tabla-resumen de propiedades de la Transformada de Fourier	46
6.	Caracterización de sistemas LIT analógicos mediante la Transformada de Fourier	48
6.1.	La relación entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia	48
6.2.	Interpretación frecuencial de la señal de salida de un sistema LIT	51
6.3.	La operación de filtrado y su representación frecuencial.....	55
7.	Introducción a la teoría del muestreo	59
7.1.	Muestreo ideal	60
7.2.	Interpretación frecuencial del muestreo ideal	60
7.3.	Teorema del muestreo	64
	Resumen	69
	Ejercicios de autoevaluación	71
	Soluciones a los ejercicios de autoevaluación	74
	Bibliografía.....	77

Introducción

En el módulo anterior se introdujo la Transformada de Laplace como una herramienta que permite analizar señales y sistemas LIT analógicos en un dominio transformado en el que, a menudo, resulta más sencillo interpretar su comportamiento y analizar las características que presentan. Sin embargo, parte de esta sencillez queda diluida por el hecho de que la Transformada de Laplace implica una integración sobre el plano complejo, dando lugar a dos variables transformadas que se corresponden con la parte real y la parte imaginaria de la variable compleja s .

En la práctica, es habitual trabajar con una transformación alternativa según la cual toda señal analógica (si se cumple un determinado conjunto de condiciones de contorno) puede ser representada como superposición de señales sinusoidales o, equivalentemente, señales exponencial compleja. Dicha transformación es útil en la práctica porque las señales sinusoidales son fáciles de generar y suponen una herramienta accesible y sencilla para adentrarse en el análisis transformado de señales y de sistemas. Siendo el parámetro fundamental de una senoide su frecuencia, el análisis mediante la Transformada de Fourier se conoce también como «análisis frecuencial» o «análisis en el dominio de la frecuencia». Su origen se remonta al siglo XVIII y el lector interesado podrá encontrar un breve relato histórico sobre su evolución hasta nuestros días en Oppenheim, Willsky, & Nawab (1996, pp. 162-166).

En el presente módulo nos centraremos en introducir los fundamentos de la Transformada de Fourier. El objetivo es ver cómo esta transformada puede ser utilizada como herramienta práctica para la resolución de problemas relacionados con el análisis de señales y sistemas LIT analógicos. Para ello, comenzaremos repasando en la sección 1 la conexión existente entre la Transformada de Laplace que acabamos de ver en el módulo anterior y la Transformada de Fourier que se presenta en el presente módulo. Posteriormente, la sección 2 se adentra en las propiedades de la Transformada de Fourier, las cuales son esenciales para comprender la dimensión que aporta esta transformada en el análisis de señales y sistemas. Muchas de estas propiedades seguramente pervivirán intactas en la mente del lector por mucho tiempo. A continuación, la sección 3 introduce algunas consideraciones asintóticas que son de interés para el análisis de señales y sistemas analógicos, así como el denominado efecto de Gibbs. Seguidamente, la sección 4 aborda el análisis frecuencial de señales analógicas periódicas, las cuales, como se verá, dan lugar a una representación discreta en el dominio de la frecuencia. Esta observación es de gran importancia, ya que relaciona la periodicidad en un dominio con la discretización en el dominio opuesto. Esta relación, de hecho, será de gran utilidad más adelante, cuando llegue el momento de analizar frecuencialmente señales en tiempo discreto. En su parte final, el módulo concluye presentando cómo la Transformada de Fourier resulta ser de gran utilidad a la hora de caracterizar los sistemas LIT analógicos, así como a la hora de estudiar los fundamentos de las técnicas de muestreo de señales analógicas.

Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Comprender los fundamentos de la Transformada de Fourier y su relación con la Transformada de Laplace.
2. Conocer las limitaciones de la Transformada de Fourier y las condiciones bajo las cuales es posible calcularla.
3. Aplicar la Transformada de Fourier para obtener la representación frecuencial tanto de señales de duración finita como de señales periódicas.
4. Conocer las propiedades de la Transformada de Fourier y su uso práctico para el cálculo de transformadas de Fourier.
5. Conocer las transformadas de Fourier de las señales más habituales.
6. Comprender la relación entre la Transformada de Fourier de señales periódicas y la Serie de Fourier.
7. Consolidar la relación entre tiempo y frecuencia en lo que respecta a la entrada/salida de sistemas LIT a través de la ecuación de convolución, o bien a través del producto de respuestas frecuenciales.
8. Conocer los principales tipos de filtros como sistemas LIT que seleccionan o eliminan una determinada banda de frecuencias.
9. Conocer el muestreo ideal mediante un tren de deltas de Dirac y comprender el Teorema de Nyquist.

1. De la Transformada de Laplace a la Transformada de Fourier

El objetivo de esta primera sección es introducir la Transformada de Fourier. Para ello, se presentarán en primera instancia (apartado 1.1) sus ecuaciones de análisis y de síntesis. Posteriormente, se planteará la dualidad existente a la hora de representar la variable frecuencia en unas u otras unidades (apartado 1.2). A continuación (apartado 1.3), se hará una breve mención a cómo representar la transformada de Fourier de una señal y qué información puede extraerse de dicha representación. Finalmente, se presentarán las condiciones de convergencia de la Transformada de Fourier (apartado 1.4), para dar ya paso al apartado 1.5, donde se presentará una colección de ejemplos sencillos a fin de ir familiarizando al lector con el cálculo de la Transformada de Fourier.

1.1. Ecuaciones de análisis y de síntesis de la Transformada de Fourier

Tal y como se ha visto anteriormente, la Transformada de Laplace juega un papel clave en la caracterización de señales y sistemas LIT en tiempo continuo. Sin embargo, a menudo se argumenta que la Transformada de Laplace es una herramienta excesivamente teórica y poco intuitiva, ya que implica una integración en el plano complejo y convierte una señal de variable real (el tiempo continuo) en una transformada de variable compleja (la variable s). Es decir, para representar la misma información es necesario utilizar dos variables en el dominio de Laplace, la parte real de s y la parte imaginaria de s , en lugar de solo una, tal y como se hace en el dominio temporal. A primera vista, no hay una razón evidente que justifique la necesidad de utilizar dos variables y ello hace que surjan alternativas para comprimir la redundancia que contiene la Transformada de Laplace y volverla a reducir a una sola dimensión. Una de estas alternativas se basa en la función exponencial e^{st} , que, como ya sabemos, presenta la propiedad de ser una autofunción de los sistemas LIT analógicos. Es decir, al excitar la entrada de un sistema analógico LIT de respuesta impulsional $h(t)$ con la señal $x(t) = e^{st}$, el sistema presenta una señal $y(t)$ a su salida dada por

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{s(t-\lambda)} d\lambda = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda}_{H(s)} = e^{st} H(s) \quad (1)$$

siendo $H(s)$ la transformada de Laplace de la respuesta impulsional $h(t)$ y denominada habitualmente la **función de transferencia** del sistema. El resultado en (1) muestra cómo la señal exponencial que hay en la entrada vuelve a aparecer en la salida acompañada de un factor de escala, dado por la función de transferencia, el cual resume el comportamiento del sistema en función de la variable compleja s .

De entre todas las posibles señales exponenciales, hay una de ellas que es de especial interés para nosotros y que no es otra que la **señal exponencial compleja**: esto es, $e^{j\Omega t}$, en donde se ha llevado a cambio el **cambio de variable** $s = j\Omega$. Este cambio es interesante porque la senyal

exponencial compleja tiene un significado físico más tangible, al poder ser interpretada como **un fasor en el plano complejo rotando a una velocidad angular constante Ω , cuya proyección en los ejes real e imaginario da lugar a las funciones $\cos(\Omega t)$ y $\sin(\Omega t)$, respectivamente.** Estas señales co/sinusoidales son fácilmente generables en un laboratorio y corresponden, haciendo un símil acústico, a **tonos de frecuencia pura**. La importancia de las señales exponencial compleja es aún mayor si tenemos en cuenta que cualquier señal periódica $x_p(t)$ puede ser expresada como una combinación lineal de exponenciales complejas. Esto es,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\Omega_n t} \quad (2)$$

en función de unos ciertos coeficientes $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ correspondientes a un conjunto de frecuencias $\{\Omega_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Este resultado se conoce como la **Serie de Fourier** y hace que el interés en las señales exponencial compleja sea aún más grande (más sobre la Serie de Fourier en el apartado 4.2 de este mismo módulo).

Esto hace que, de todo el plano complejo definido por la variable de Laplace s , en la práctica nos interese restringirnos al caso $s = j\Omega$. Esta particularización no solo hace más intuitivo el análisis en el dominio transformado a partir del uso de exponenciales complejas, sino que, además, reduce la Transformada de Laplace a una nueva transformada d'una sola variable, Ω .

Esta nueva transformada es conocida como la **Transformada de Fourier** y permite una relación unívoca entre tiempo (variable t) y frecuencia (variable Ω), haciendo más sencilla e intuitiva su interpretación. La notación comúnmente utilizada para expresar la relación entre ambas representaciones es la siguiente:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (3)$$

donde la letra \mathcal{F} simboliza la Transformada de Fourier.

La **ecuación de análisis** de la Transformada de Fourier (o **Transformada de Fourier directa**) es la operación que permite obtener $X(\Omega)$, que es la transformada de Fourier de $x(t)$, según

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[x(t)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (4)$$

Asimismo, la **ecuación de síntesis** de la Transformada de Fourier (o **Transformada de Fourier inversa**) permite obtener $x(t)$ a partir de su transformada de Fourier $X(\Omega)$, y se define según

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\Omega)] \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (5)$$

Es interesante notar que la ecuación de análisis en (4) no es más que el producto escalar¹ entre la señal $x(t)$ y una señal exponencial compleja de frecuencia Ω , esto es, $e^{j\Omega t}$. De esta forma, vemos que **lo que la Transformada de Fourier hace realmente es proyectar la señal $x(t)$ sobre un conjunto de señales exponencial compleja de frecuencias $\Omega = (-\infty, \infty)$** . Y es teniendo esto presente, que se entiende entonces el hecho de que **la transformada de Fourier $X(\Omega)$ no es más que una medida de cómo se parece la señal $x(t)$ a una señal exponencial compleja $e^{j\Omega t}$ para todas y cada una de las posibles frecuencias $\Omega = (-\infty, \infty)$** .

Por su parte, lo que hace la Transformada de Fourier inversa es reconstruir la señal $x(t)$ a partir de la suma ponderada de un conjunto de señales exponencial compleja $e^{j\Omega t}$, en donde la ponderación (*i.e.* la amplitud de cada exponencial compleja) viene dada por la propia transformada de Fourier de $x(t)$, $X(\Omega)$. Este hecho confirma que toda señal $x(t)$ puede representarse como una suma de exponenciales complejas, siempre y cuando se cumplan las condiciones de convergencia que más adelante se presentarán en el apartado 1.4.

Por último, (4) y (5) nos muestran que la Transformada de Fourier cumple dos propiedades interesantes. La primera, que es una transformación reversible, ya que es posible pasar de $x(t)$ a $X(\Omega)$, y posteriormente de $X(\Omega)$ a $x(t)$. La segunda, íntimamente relacionada con la primera, que en este proceso de transformación no hay pérdida alguna de información.

1.2. Consideraciones acerca de la variable frecuencia

Por convención, utilizaremos la variable Ω para representar el dominio frecuencial, cuyas unidades se expresan en *rad/seg*. En ciertas aplicaciones o disciplinas, sin embargo, es habitual representar el dominio frecuencial mediante la variable F , cuyas unidades se expresan en *Hz*. Ambas variables están relacionadas, ya que

$$\Omega = 2\pi F \quad (6)$$

Así, el factor de conversión entre ambas unidades de frecuencia viene dado por un factor 2π :

$$[\text{rad/seg}] = 2\pi[\text{Hz}] \Leftrightarrow [\text{Hz}] = \frac{1}{2\pi}[\text{rad/seg}] \quad (7)$$

Utilizando la variable F , la definición de la Transformada de Fourier directa que se ha introducido en (4) y la Transformada de Fourier inversa de (5) quedan de este modo:

$$X(F) = \mathcal{F}_f[x(t)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft} dt \quad (8)$$

$$x(t) = \mathcal{F}_f^{-1}[X(F)] \doteq \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi Ft} dF \quad (9)$$

¹ En términos generales, el producto escalar entre dos señales $a(t)$ y $b(t)$ viene dado por la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b^*(t)dt$, en la que, al utilizar el operador $*$ (que representa el complejo conjugado), se contempla el caso general en que las dos señales puedan ser complejas: $a(t), b(t) \in \mathbb{C}$.

La razón por la cual se suele preferir trabajar con la variable Ω es que, si fuera necesario, convertir una transformada en Ω a una transformada en F es más sencillo y directo que hacerlo al revés. Convertir de Ω a F implica sustituir una variable por otra y eliminar aquellos factores de escala 2π que aparezcan multiplicando a la transformada de Fourier en Ω . Hacerlo al revés, comenzando con la variable F para convertir a la variable Ω no es tan directo, ya que dichos factores de escala 2π no siempre es necesario añadirlos y, por lo tanto, no es evidente saber en qué casos son necesarios y en qué casos no lo son. Eliminarlos, sin embargo, es algo directo y fácil de recordar.

1.3. Representación gráfica de la Transformada de Fourier

En este apartado se abordan tres aspectos. El primero de ellos hace referencia al significado mismo de la Transformada de Fourier y a la información que su representación gráfica proporciona. Para ello, es necesario recordar que la representación temporal es la forma en que habitualmente obtenemos los estímulos de nuestro entorno, en base a observar cómo diferentes fenómenos evolucionan a medida que avanza el tiempo. Sin embargo, hay circunstancias en las que la representación temporal no es adecuada para extraer cierto tipo de información, como, por ejemplo, cuál es la periodicidad a la que aparecen ciertos eventos o a la que se repiten ciertos patrones. Un ejemplo muy sencillo se muestra en la parte superior de la Figura 1, donde la señal $x_1(t)$ corresponde a una señal sinusoidal pura.

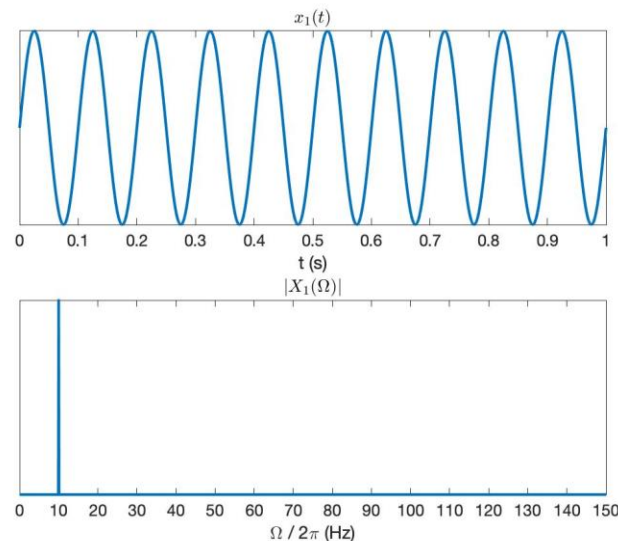


Figura 1. Ejemplo de una señal sinusoidal en el dominio temporal (arriba) y de su representación en el dominio frecuencial (abajo); en concreto, de la representación gráfica del módulo de su transformada de Fourier.

La representación temporal muestra claramente que la señal oscila a medida que avanza el tiempo y su periodicidad en este caso se puede obtener fácilmente midiendo el periodo fundamental de la señal. A partir de esta figura, se aprecia que la señal se repite cada 0.1 segundos, con lo cual, el periodo de la senoide es de 0.1 segundos y, por lo tanto, su frecuencia es de 10 Hz. Esto es, el periodo básico de la señal se repite 10 veces por segundo. Ni más, ni menos. Es debido a ello que la representación frecuencial de la señal $x_1(t)$ nos debería decir que todo el contenido de la señal $x_1(t)$ está concentrado en una única

frecuencia: los 10 Hz. Como consecuencia, la transformada de Fourier de la señal $x_1(t)$ debería de ser algo similar a una delta centrada a la frecuencia 10 Hz, tal y como efectivamente se muestra en su representación frecuencial, ilustrada en la parte inferior de la misma Figura 1. En este primer ejemplo, se puede observar que la transformada de Fourier de la señal $x_1(t)$ ha sido capaz de concentrar todos los puntos de la señal $x_1(t)$ en tan solo un único punto en el dominio frecuencial: el punto correspondiente a la frecuencia 10 Hz. De esta forma, la transformada de Fourier se puede ver como un mecanismo de “compresión” de la información contenida en el dominio del tiempo.

El ejemplo de la señal $x_1(t)$ es un caso muy sencillo donde, de hecho, ni siquiera es necesario representar la transformada de Fourier para saber que la periodicidad de esta señal es de 10 Hz. Nosotros mismos lo hemos deducido midiendo en la representación temporal de $x_1(t)$, en la parte superior de la Figura 1, cada cuánto tiempo se repite la señal. Sin embargo, esto no es lo habitual en la práctica, puesto que lo más común es encontrarse con señales como la que se muestra en la parte superior de la Figura 2.

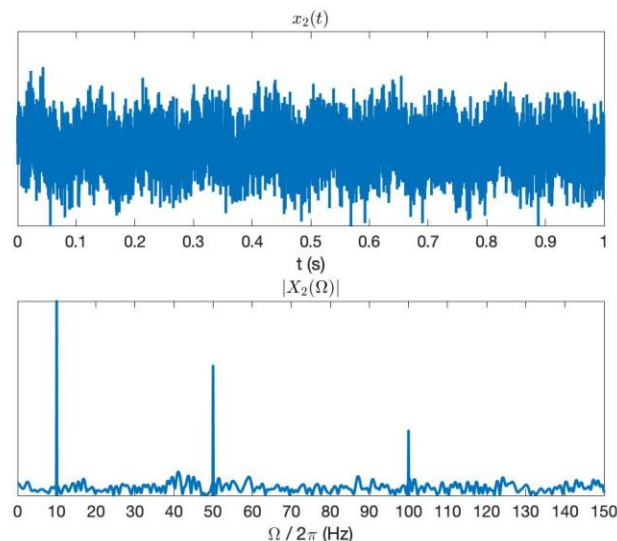


Figura 2. Ejemplo de una señal arbitraria en el dominio temporal (arriba) y de su representación en el dominio frecuencial (abajo); en concreto, de la representación gráfica del módulo de su transformada de Fourier.

En este caso no es fácil deducir a partir de su representación temporal si la señal $x_2(t)$ presenta o no algún tipo de patrón repetitivo. Aparentemente, uno diría que esta señal está formada básicamente por ruido, sin poseer estructura alguna. Ahora bien, la representación de su transformada de Fourier, mostrada en la parte inferior de la Figura 2, muestra claramente lo contrario. La señal $x_2(t)$ sí presenta una cierta estructura, ya que tiene tres componentes frecuenciales que claramente predominan sobre el resto y que se corresponden con las frecuencias 10, 50 y 100 Hz. Esta conclusión es imposible de obtener solo observando la evolución temporal de la señal $x_2(t)$, lo cual ya nos da una buena primera muestra del potencial de la Transformada de Fourier.

El segundo aspecto que se pretende abordar en este apartado es la representación gráfica misma de la Transformada de Fourier. En los dos ejemplos anteriores hemos pasado por alto un aspecto relevante (que sí aparece comentado en los pies de la Figura 1 y la Figura 2) y es que lo que se muestra en esas figuras no es la transformada de Fourier $X(\Omega)$ sin más, sino el

módulo de la transformada de Fourier: $|X(\Omega)|$. Ello es así porque, **por lo general, el resultado de la Transformada de Fourier es una señal compleja y, por lo tanto, puede descomponerse, bien en una señal parte real y una señal una parte imaginaria (ambas señales reales), o bien en una señal módulo y una señal fase (ambas señales reales).**

Más adelante, en la sección 2, se discutirán las propiedades de simetría de la Transformada de Fourier y las condiciones que deben darse en una señal para que su transformada de Fourier sea una señal real. Pero, por lo general, uno debe esperar que la transformada de Fourier de una señal real sea compleja y, por lo tanto, su representación gráfica merece especial mención. Hay varias formas de representar una señal compleja, pero **lo más habitual en la Transformada de Fourier es representar su señal módulo y su señal fase**, tal y como se muestra, por ejemplo, en el apartado 1.5, para el caso de una señal exponencial multiplicada por una señal escalón.

A nivel cualitativo, **el módulo de la Transformada de Fourier proporciona información sobre cuál es el contenido frecuencial de una señal:**

- Si el módulo de una transformada de Fourier presenta una contribución significativa a **frecuencias bajas**, entonces la señal en el dominio del tiempo varía de **forma suave**.
- Por el contrario, si el módulo de una transformada de Fourier presenta una contribución significativa a **frecuencias altas**, entonces la señal en el dominio del tiempo sufre **variaciones rápidas y/o abruptas**.

Por su parte, **la fase de la transformada de Fourier proporciona información acerca de cómo se comportan las diferentes frecuencias cuando la señal experimenta un retraso**. Como veremos en el subapartado 2.1.2, **un retardo de la señal en el dominio del tiempo implica que la fase de su transformada de Fourier varía linealmente en función de la frecuencia**. Esta propiedad es muy utilizada en la caracterización de sistemas. Si un sistema LIT es tal que su respuesta impulsional $h(t)$ presenta una transformada de Fourier $H(\Omega)$ con fase lineal, entonces este sistema le aplica en su salida el mismo retardo a todas y cada una de las frecuencias que forman la señal de entrada. De lo contrario, el sistema puede distorsionar la señal de salida.

Finalmente, el tercer y último aspecto está también relacionado con la representación de la Transformada de Fourier, pero hace referencia a casos en que interesa analizar el comportamiento de una transformada de Fourier para frecuencias extremas, ya sean estas muy bajas o muy altas. Cubrir simultáneamente ambos casos no es posible a menos que la representación se lleve a cabo con el eje de frecuencias en escala logarítmica, que es precisamente lo que se consigue con los denominados **diagramas de Bode**. Estos diagramas tienen la particularidad de representar en escala logarítmica tanto el módulo de la Transformada de Fourier (*i.e.* las amplitudes, en el eje de ordenadas) como su variable independiente (*i.e.* las frecuencias, en el eje de abscisas). En la Figura 3, se muestra el ejemplo

de un diagrama de Bode en el que se representa el módulo de la transformada de Fourier de una señal pulso cuadrado de 0.1 segundos de duración. Como se puede observar, la representación permite observar el comportamiento asintótico por el cual el módulo (al cuadrado) de la transformada cae a una velocidad de 20 dB por década: esto es, 20 dB cada vez que la frecuencia se multiplica por un factor 10.

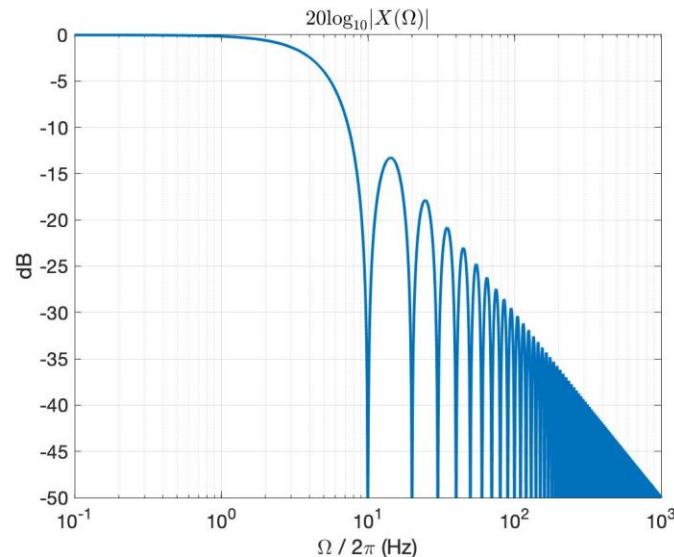


Figura 3. Diagrama de Bode correspondiente al módulo (al cuadrado) de la transformada de Fourier de un pulso cuadrado de 0.1 segundos de duración.

1.4. Condición de existencia de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier, tal y como queda definida en (4), implica el cálculo de una integral infinita en todo el dominio del tiempo. De ahí surge la duda acerca de cuáles son las condiciones que permiten que la integral de (4) converja a un valor finito en lugar de divergir. Para ello, podemos hacer uso de un **conjunto de condiciones suficientes que garantizan la convergencia de la integral de la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier**, y que son conocidas como las **condiciones de Dirichlet**:

1. La señal $x(t)$ ha de ser absolutamente integrable; esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (10)$$

2. La señal $x(t)$ ha de tener un número finito de mínimos y máximos dentro de cualquier intervalo finito de tiempo.
3. La señal $x(t)$ ha de tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito de tiempo y, además, dichas discontinuidades han de ser finitas.

Este conjunto de tres condiciones puede presentarse de forma más compacta y resumida bajo la siguiente condición de existencia:

Si la señal $x(t)$ es absolutamente integrable y continua y no presenta discontinuidades infinitas, entonces existe la transformada de Fourier de $x(t)$.

Y, muy importante, obsérvese que esta condición de existencia de la transformada de Fourier de una señal puede expresarse equivalentemente en términos de la Transformada de Laplace: **si la ROC de la transformada de Laplace de $x(t)$ incluye el eje imaginario del plano s , entonces existe la transformada de Fourier de $x(t)$.**

Por otro lado, hay que insistir en que **esta condición de existencia es suficiente, pero no necesaria**. Esto quiere decir que **puede darse el caso de señales que no cumplan esta condición, pero que igualmente exista su transformada de Fourier**. Por ejemplo, podemos tomar la señal signo, $x(t) = \text{sgn}(t)$, que, como ya vimos en el primer módulo al estudiar la señal escalón unitario, toma el signo de su argumento (en este caso, de la variable tiempo):

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } t < 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Se trata por tanto de una señal que presenta dos discontinuidades finitas a la izquierda y a la derecha de $t = 0$, respectivamente, con lo que cumple las condiciones de Dirichlet 2 y 3. Sin embargo, no es una señal absolutamente integrable y, por lo tanto, incumple la condición de Dirichlet 1. A pesar de ello, sí que existe la transformada de Fourier de la señal signo: ver el Ejemplo 1 en el apartado 2.1 para más detalles. El de la señal signo es un caso particular, porque se trata de una señal que no es absolutamente integrable, así como tampoco cuadráticamente integrable (*i.e.* no cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$). Sin embargo, existen señales que, aun no siendo absolutamente integrables, sí que son cuadráticamente integrables y esta propiedad les ayuda a asegurar la existencia de su transformada de Fourier.

En general, si una señal no es absolutamente integrable e incumple la condición de Dirichlet 1, su transformada de Fourier puede existir si resulta ser una señal cuadráticamente integrable. Aun así, a pesar de que una señal no sea absolutamente integrable ni tampoco cuadráticamente integrable, es posible que posea transformada de Fourier siempre que pueda hacerse uso de una señal especial, que nosotros ya conocemos muy bien, que presenta unas propiedades muy particulares y que en algunos casos permite solventar estos problemas de convergencia. Dicha función (que, como ya sabemos, formalmente no es considerada una «función» como tal, en el sentido matemático estricto) no es otra que la señal delta de Dirac, denotada según $\delta(t)$, y permite que la transformada de Fourier presente impulsos en su respuesta. ¿En qué casos es útil la delta de Dirac para el cálculo de la Transformada de Fourier? Lo veremos más adelante, pero, por el momento, piénsese en las señales periódicas (ver sección 4 de este mismo módulo) o, también, en las señales cuya transformada de Laplace presenta algún polo justo sobre el eje imaginario (*i.e.* para $s = 0$), como por ejemplo la señal escalón unitario (ver el Ejemplo 4 de este mismo módulo).

Para terminar este apartado, recordemos ahora algunas de las propiedades de la señal delta de Dirac. En este repaso, se ha considerado una variable independiente genérica v en lugar de la variable temporal t , a fin de remarcar el hecho de que las propiedades mostradas a continuación son generales. Es decir, que estas propiedades se mantienen con independencia de si la variable de la delta de Dirac está en unidades de tiempo o de frecuencia:

1. $\delta(v) = \begin{cases} \infty, & v = 0 \\ 0, & v \neq 0 \end{cases}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) dv = 1$.
3. Para cualquier señal $x(v)$, se tiene que: $x(v)\delta(v - v_0) = x(v_0)\delta(v - v_0)$.
4. $x(v) * \delta(v - u_0) = x(v - u_0)$.

Como ya se ha mencionado, más adelante, en la sección 4, se hará uso de estas propiedades de la delta de Dirac a la hora de **calcular la transformada de Fourier de una señal periódica cualquiera**.

1.5. Cálculo de transformadas de Fourier de algunas señales básicas

En los apartados anteriores se ha presentado la Transformada de Fourier a través de sus ecuaciones de análisis y síntesis. En este apartado se pretende poner en práctica estos conocimientos. El objetivo es calcular paso a paso la Transformada de Fourier a través de un conjunto básico de señales analógicas. Más adelante, en la sección 2, se introducirá toda una serie de propiedades que agilizará el cálculo de la Transformada de Fourier. El lector comprobará cómo, en la gran mayoría de ocasiones, la transformada de Fourier de una señal se puede obtener aplicando una o varias de estas propiedades, en lugar de calcular paso a paso la integral de la ecuación de análisis en (4), tal y como se hará a continuación. Sin embargo, el ejercicio que se presenta a continuación sigue siendo interesante desde un punto de vista didáctico, pues permite poner en práctica la ecuación (4) y tener un conjunto inicial de señales y sus respectivas transformadas de Fourier con las que poder comenzar a trabajar.

1.5.1. Señal delta de Dirac

El primer ejemplo de transformada de Fourier que veremos será para el caso de la señal delta de Dirac, $x(t) = \delta(t)$. Utilizando la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier, definida en (4), y las propiedades de la señal delta de Dirac revisadas en el apartado anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} X(\Omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 0) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 0) e^{-j0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

El resultado indica que **la señal delta de Dirac posee una amplitud constante en todas las frecuencias**, y es un ejemplo de la relación inversa que existe entre tiempo y frecuencia. Es

decir, una señal de duración muy pequeña en el dominio temporal da lugar a una transformada de ocupación muy amplia en el dominio frecuencial.

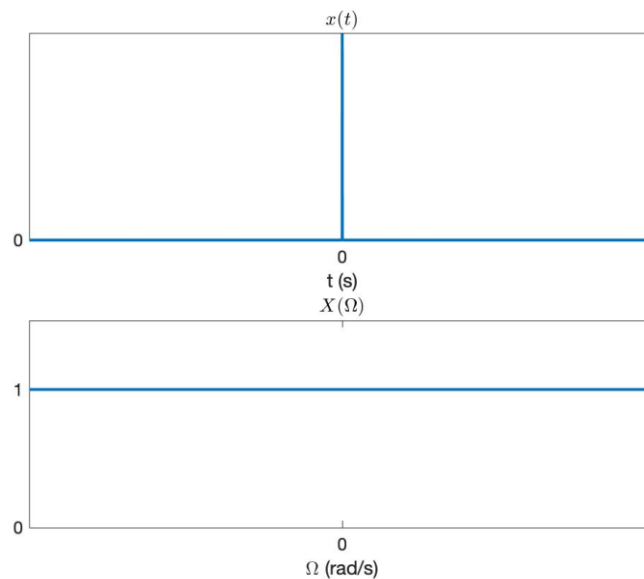


Figura 4. Representaciones gráficas de la delta de Dirac (arriba) y su transformada de Fourier (abajo).

1.5.2. Producto de señal exponencial por señal escalón unitario

En este caso tenemos la señal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, donde $\alpha > 0$ es una constante arbitraria y $u(t)$ es la función escalón unitario (tal que, recordemos, $u(t) = 1$ para $t \geq 0$, y $u(t) = 0$ para $t < 0$). Aplicando la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier, tenemos que:

$$\begin{aligned} X(\Omega) = \mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\Omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+j\Omega} [e^{-(\alpha+j\Omega)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+j\Omega} \end{aligned} \quad (13)$$

En este caso obtenemos una transformada de Fourier compleja, por lo que su representación gráfica debe contener sus partes real e imaginaria, o bien su módulo y su fase. Como ya hemos comentado, habitualmente se opta por el segundo caso, dando lugar a la representación que se muestra en la Figura 5.

El módulo de esta transformada de Fourier puede obtenerse como

$$|X(\Omega)| = \sqrt{X(\Omega)X^*(\Omega)} = \sqrt{\frac{1}{\alpha+j\Omega} \frac{1}{\alpha-j\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \quad (14)$$

y se muestra en la parte central de la Figura 5, donde se observa cómo la mayor parte de la energía de la señal está concentrada a frecuencias bajas y cómo el contenido frecuencial va disminuyendo gradualmente a medida que aumenta la frecuencia. Este comportamiento es coherente con el hecho de que la señal en tiempo es eminentemente suave (y, por lo tanto, predominan las bajas frecuencias en su transformada de Fourier). Pero el hecho de que experimente un salto abrupto en $t = 0$ hace que aparezca contenido frecuencial a frecuencias altas, que, si bien es menos intenso que a frecuencias bajas, no es despreciable.

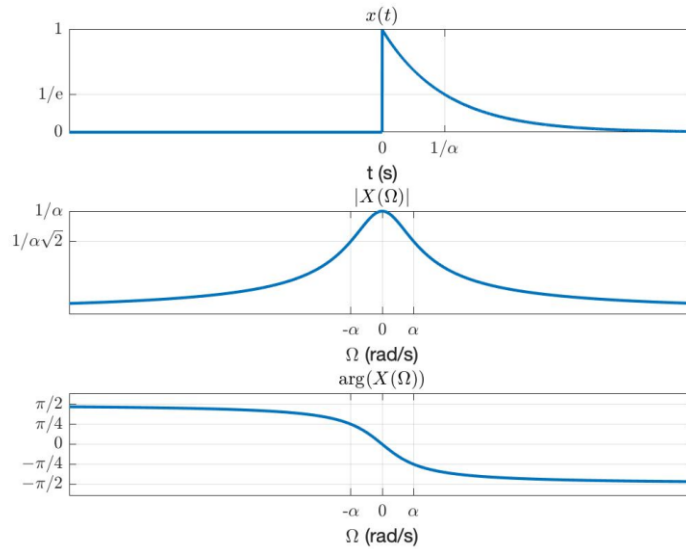


Figura 5. Representaciones gráficas de una señal exponencial multiplicada por un escalón unitario (arriba) y el módulo (en medio) y la fase (abajo) de su transformada de Fourier.

Y, respecto de la fase de esta transformada de Fourier, esta puede obtenerse manipulando la expresión que hemos obtenido en (13) para que quede en forma de un número complejo con parte real más parte imaginaria. Para ello, se puede multiplicar por el conjugado del denominador tanto en el numerador como en el denominador. De esta forma se obtiene

$$X(\Omega) = \frac{\alpha - j\Omega}{\alpha - j\Omega} \left(\frac{1}{\alpha + j\Omega} \right) = \frac{\alpha - j\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2} = \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2} (\alpha - j\Omega) \quad (15)$$

Así, tal y como se ve en la Figura 5 (abajo), la fase de la transformada de Fourier resulta ser

$$\mathfrak{A}rg(X(\Omega)) = \text{atan}\left(\frac{\Im(X(\Omega))}{\Re(X(\Omega))}\right) = \text{atan}\left(-\frac{\Omega}{\alpha}\right) \quad (16)$$

1.5.3. Señal pulso cuadrado

A continuación, consideramos la señal pulso cuadrado de duración T , es decir, $x(t) = \Pi(t/T)$. Esta señal aparece frecuentemente en sistemas de comunicación digital y en sistemas electrónicos, con lo que conocer su transformada de Fourier resulta obligatorio y muy útil en general. Aplicando directamente la ecuación de análisis, la transformada de Fourier del pulso cuadrado resulta ser:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t} dt = -\frac{1}{j\Omega} [e^{-j\Omega t}]_{-T/2}^{T/2} \\ &= -\frac{e^{-j\Omega T/2} - e^{j\Omega T/2}}{j\Omega} = \frac{2 \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega} = T \frac{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\frac{\Omega T}{2}} \\ &= T \frac{\sin\left(\pi \frac{\Omega T}{\pi 2}\right)}{\pi \frac{\Omega T}{\pi 2}} = T \text{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Se observa que en (17) se ha utilizado la señal sinc, cuya definición establece, como ya sabemos, que $\text{sinc}(v) \doteq \sin(\pi v)/(\pi v)$, allí donde v es una variable independiente cualquiera. El resultado obtenido en (17) se puede expresar equivalentemente en unidades de Hz :

$$X(F) = \mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{T} \right) \right] = T \text{sinc}(FT) \quad (18)$$

Estos resultados se muestran en la Figura 6. Nótese que, en este caso particular, hemos obtenido una transformada de Fourier que es una señal real, por lo que esta se representa directamente en la Figura 6 sin necesidad de distinguir entre módulo y fase.

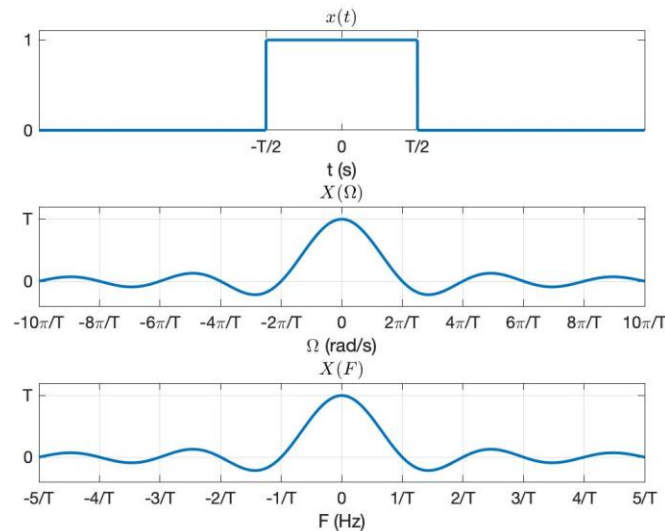


Figura 6. Representaciones gráficas de la señal pulso cuadrado (arriba), su transformada de Fourier en unidades de *rad/seg* (en medio), y su transformada de Fourier en unidades de *Hz* (abajo).

La característica principal del pulso cuadrado es que se trata de una señal limitada en tiempo. Como se puede observar, su transformada de Fourier presenta el comportamiento inverso, ya que no está limitada en frecuencia, sino que presenta energía a todas las frecuencias, a pesar de que esta energía se va haciendo cada vez más pequeña a medida que aumenta la frecuencia. La otra característica relevante del pulso cuadrado es que su transformada de Fourier presenta nulos de forma periódica al ritmo de los nulos de la señal sinc. Así, si la anchura total del pulso es de T segundos, los nulos aparecen en frecuencia a múltiplos enteros de la frecuencia $2\pi/T$ *rad/seg* o, equivalentemente, $1/T$ *Hz*.

2. Propiedades de la Transformada de Fourier

Hemos acabado la sección anterior presentando algunos ejemplos sencillos de cálculo de transformadas de Fourier de algunas señales básicas, pero en muchas ocasiones no es necesario recurrir a resolver la integral definida en (4) para obtener la transformada de Fourier que se busca. En estos casos es suficiente con conocer la transformada de Fourier de algunas señales básicas y combinar esos resultados con una serie de propiedades que determinan cómo se comporta la Transformada de Fourier ante algunas operaciones básicas. Por ejemplo, qué ocurre cuando queremos calcular la transformada de Fourier de una suma de señales, o qué le ocurre a la transformada de Fourier de una señal cuando esta sufre un retardo (o desplazamiento horizontal) en el dominio del tiempo, o un cambio de escala, etc. En esta sección, se hace un repaso de estas situaciones y se estudia cómo aprovechar este conocimiento para calcular la transformada de Fourier de una nueva señal a partir de ejemplos concretos.

2.1. Propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier

A continuación, se presentan las propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier. Como puede observarse, muchas de ellas no son sino el resultado de la particularización para $s = j\Omega$ de esa misma propiedad definida para la Transformada de Laplace. Además, en varias de las propiedades, se incluyen ejercicios a modo de ejemplo de aplicación de dicha propiedad.

2.1.1. Linealidad

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales analógicas cualesquiera, tales que:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\Omega) \quad (19)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\Omega) \quad (20)$$

La propiedad de linealidad de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)} \quad (21)$$

allí donde a_1 y a_2 son dos constantes, en general, complejas ($a_1, a_2 \in \mathbb{C}$).

Ejemplo 1

Se pide calcular la transformada de Fourier de la señal signo, ya definida en la ecuación (11).

Solución

La señal signo puede ser vista como un caso particular de la señal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, que se analizó en el apartado 1.5, teniendo en cuenta que:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{-\alpha t}u(t) - e^{\alpha t}u(-t)] \quad (22)$$

Aplicando la propiedad de linealidad, tenemos

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \mathcal{F}\left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{-\alpha t}u(t) - e^{\alpha t}u(-t)]\right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] - \mathcal{F}[e^{\alpha t}u(-t)]] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\Omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t}u(-t)e^{-j\Omega t} dt \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\alpha + j\Omega} [e^{-(\alpha + j\Omega)t}]_0^{\infty} - \frac{1}{\alpha - j\Omega} [e^{(\alpha - j\Omega)t}]_0^{-\infty} \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\alpha + j\Omega} - \frac{1}{\alpha - j\Omega} \right] = \frac{2}{j\Omega} \end{aligned} \quad (23)$$

El resultado obtenido se muestra en la Figura 7:

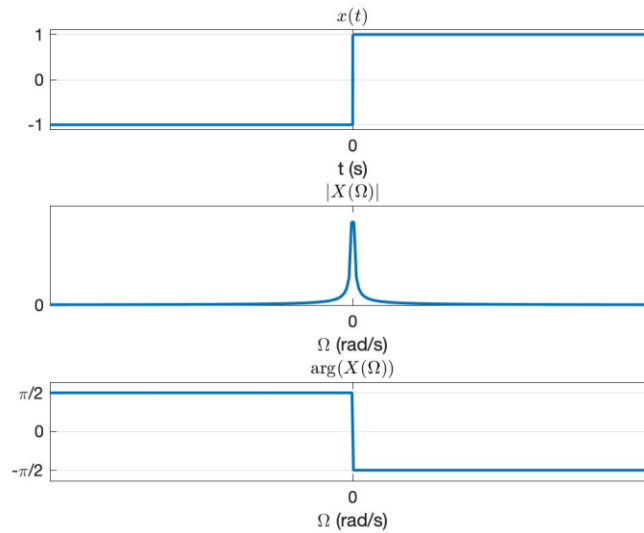


Figura 7. Representaciones gráficas de la señal signo (arriba) y el módulo (en medio) y la fase (abajo) de su transformada de Fourier.

2.1.2. Desplazamiento en el dominio temporal (o retardo)

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (24)$$

La propiedad de retardo de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) e^{-j\Omega t_0}} \quad (25)$$

allí donde t_0 es una constante, en general, real ($t_0 \in \mathbb{R}$).

La propiedad de retardo es una de las más utilizadas en la práctica y relaciona **un retardo en el dominio del tiempo** con la presencia de **una fase lineal en el dominio de la frecuencia**. A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar mejor esta observación.

Ejemplo 2

Se pide calcular la transformada de Fourier de un pulso cuadrado de amplitud 1, duración T segundos y que empieza en $t = 0$.

Solución

En este ejemplo recurriremos a la transformada de Fourier del pulso cuadrado que hemos calculado en el apartado 1.5. Allí, en (17), hemos visto que la transformada de Fourier de la señal $x(t) = \Pi(t/T)$ es $X(\Omega) = T \text{sinc}(\Omega T/2\pi)$. Ese pulso cuadrado es de amplitud 1 y duración T segundos, pero empieza en $t = -T/2$.

Para que el pulso sea tal y como se pide en este ejemplo, necesitamos que $x(t) = 0$ para $t < 0$. Para ello, lo que podemos hacer es simplemente retrasar el pulso original $T/2$ segundos, de forma que el pulso comience justo en el instante $t = 0$.

De esta forma obtenemos el nuevo pulso $x'(t) = \Pi((t - T/2)/T)$. Nótese que este nuevo pulso $x'(t)$ es simplemente una versión retardada del pulso original. Esto es, $x'(t) = x(t - T/2)$. Sabiendo esta relación, podemos afirmar entonces que la transformada de Fourier de $x'(t)$ viene dada a través de la propiedad de retardo por $X'(\Omega) = X(\Omega)e^{-j\Omega T/2}$. Aplicando esta propiedad tenemos

$$X'(\Omega) = X(\Omega)e^{-j\frac{\Omega T}{2}} = T \text{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right) e^{-j\frac{\Omega T}{2}} \quad (26)$$

Obsérvese que la transformada de Fourier que hemos obtenido ahora es compleja, a diferencia de lo que ocurre con la transformada del pulso cuadrado $\Pi(t/T)$ que hemos visto en el apartado 1.5. En aquel caso, teníamos una señal real y con simetría par en el dominio del tiempo. Como se verá más adelante en el Ejemplo 8, una señal real con simetría par da siempre lugar a una transformada de Fourier también real. Es la excepción al caso general donde la transformada de Fourier suele ser habitualmente compleja. Al retardar el pulso cuadrado como se pide este ejemplo, la señal en tiempo sigue siendo real, pero ha dejado de tener simetría par, con lo cual, su transformada de Fourier ha dejado de ser real y vuelve a ser compleja, tal y como se puede observar en el resultado obtenido en (26). En concreto, tenemos que su módulo y su fase son:

$$|X'(\Omega)| = T \left| \text{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right) \right| \quad (27)$$

$$\text{Arg}(X'(\Omega)) = -\frac{\Omega T}{2} \quad (28)$$

Nótese también que la fase del pulso cuadrado retardado es completamente lineal en función de la frecuencia Ω : es una recta de pendiente $-T/2$, que resulta ser precisamente el retraso que ha experimentado el pulso cuadrado en el dominio del tiempo. Además de por su utilidad práctica, esta propiedad es muy interesante por lo siguiente: un sistema LIT con una respuesta impulsional cuya transformada de Fourier presenta una fase lineal es un sistema que introduce un retardo en el dominio del tiempo, un retardo que viene dado precisamente por la pendiente de esta fase (ver la sección 6 de este mismo módulo para más detalles).

2.1.3. Escalado temporal

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (29)$$

La propiedad de escalado temporal de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)} \quad (30)$$

allí donde a es una constante, en general, real ($a \in \mathbb{R}$).

Esta propiedad es interesante ya que, en el caso de señales en tiempo discreto, es la base para la propiedad de diezmado. Sin tener que dar el paso a señales en tiempo discreto, un ejemplo de cómo aplicar la propiedad de cambio de escala se muestra un poco más adelante, en la propiedad de dualidad, como parte del Ejemplo 5.

2.1.4. Derivación en el dominio temporal

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (31)$$

La propiedad de derivación en el dominio temporal de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega X(\Omega)} \quad (32)$$

La propiedad de derivación en el dominio temporal tiene diversas aplicaciones de interés, ya que la derivada de una señal está relacionada con diferentes aspectos prácticos como, por ejemplo, la resolución temporal con la que puede estimarse el retardo de una señal (*i.e.* cuanto más grande es la derivada, mejor es la precisión con la que puede estimarse el retardo de la señal), o la demodulación de señales de comunicación donde el mensaje se ha modulado en frecuencia (*e.g.* modulación FM).

2.1.5. Integración en el dominio temporal

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (33)$$

La propiedad de integración en el dominio temporal de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{X(\Omega)}{j\Omega}} \quad (34)$$

2.1.6. Dualidad

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (35)$$

La propiedad de dualidad la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega)} \quad (36)$$

La propiedad de dualidad (que no tiene propiedad correspondiente en la Transformada de Laplace) es muy útil a la hora de aplicar transformadas de Fourier ya conocidas al cálculo de transformadas de Fourier de nuevas señales. A continuación, vemos varios ejemplos de esto.

Ejemplo 3

Sabiendo que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, ¿cuál es la transformada de Fourier de la señal $x(t) = 1$?

Solución

Partimos de la transformada de Fourier de la delta de Dirac:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \quad (37)$$

Y ahora aplicamos la propiedad de dualidad y obtenemos lo siguiente:

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\Omega) \quad (38)$$

Como la señal delta de Dirac tiene simetría par, sucede que $\delta(-\Omega) = \delta(\Omega)$, con lo que podemos reescribir el resultado como:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega) \quad (39)$$

Obsérvese que estamos ante un ejemplo de señal que no cumple con la condición de existencia de la Transformada de Fourier (puesto que $x(t) = 1$ no es absolutamente integrable), pero que, aun así, su transformada de Fourier existe y es calculable gracias al uso de la delta de Dirac.

Finalmente, representamos gráficamente el resultado obtenido en la Figura 8. Nótese que, de nuevo (recuérdese el apartado 1.5.3), la transformada de Fourier obtenida es una señal real, con lo que su representación gráfica no requiere de distinguir entre módulo y fase:

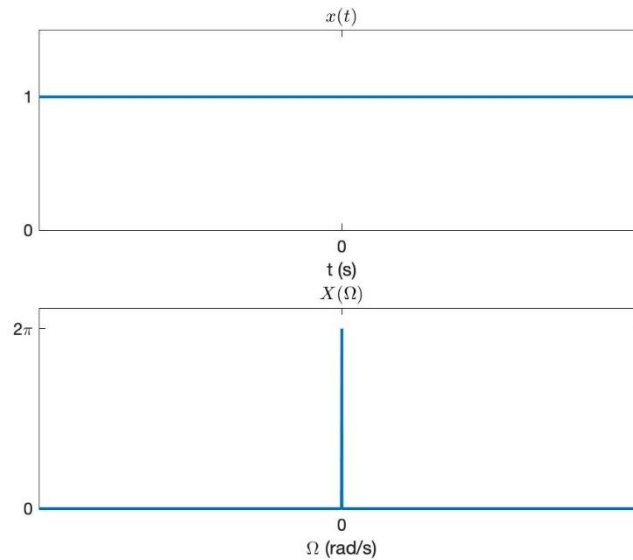


Figura 8. Representaciones gráficas de $x(t) = 1$ (arriba) y su transformada de Fourier (abajo).

Ejemplo 4

Se pide calcular la transformada de Fourier de la señal escalón unitario: $x(t) = u(t)$.

Solución

La señal escalón unitario puede expresarse a partir de la función signo del Ejemplo 1 según

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t)) \quad (40)$$

Aplicando aquí la propiedad de linealidad, tenemos que

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t))\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] \quad (41)$$

Y, finalmente, aplicando los resultados obtenidos en el Ejemplo 1 y el Ejemplo 3 (recuérdese que, para obtener este último, hemos utilizado la propiedad de dualidad), tenemos que

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \quad (42)$$

De nuevo, estamos ante otro caso de señal no absolutamente integrable cuya transformada de Fourier existe y es calculable gracias al uso de la delta de Dirac.

Ejemplo 5

Sabiendo que $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}(\Omega/2\pi)$, ¿cuál es la transformada de Fourier de $x(t) = \operatorname{sinc}(Bt)$, siendo B una constante real positiva?

Solución

Aplicando la propiedad de dualidad, vemos que de este resultado conocido:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) \quad (43)$$

obtenemos este otro resultado nuevo:

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\Pi(-\Omega) \quad (44)$$

Obsérvese que hemos aplicado la propiedad de dualidad y hemos sustituido, a la derecha de todo, la variable t por la variable Ω , interpretando de forma literal la propiedad de dualidad.

A continuación, para obtener la transformada de Fourier de $\text{sinc}(Bt)$ a partir del resultado obtenido en (44), vamos a aplicar la propiedad de escalado temporal de la Transformada de Fourier que, recordemos, establece que

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right) \quad (45)$$

Lo que vamos a hacer es aplicar un cambio de escala y pasar de $\text{sinc}(t/2\pi)$ a $\text{sinc}(Bt)$. Nótese que el cambio de escala que necesitamos aplicar consiste en sustituir la variable de tiempo t por la variable escalada at con $a = 2\pi B$. Es decir:

$$\text{sinc}(Bt) = \text{sinc}\left(\frac{at}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{|a|} \Pi\left(\frac{-\Omega}{a}\right) = \frac{2\pi}{|2\pi B|} \Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B}\right) = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B}\right) \quad (46)$$

donde se ha aprovechado, primero, que B es una constante positiva, con lo que $|B| = B$; y, segundo, que el pulso cuadrado es una función par, con lo que $\Pi(-\Omega) = \Pi(\Omega)$. El resultado final es, por tanto, el siguiente:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[\text{sinc}(Bt)] = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B}\right) \quad (47)$$

Además, sabiendo que $\Omega = 2\pi F$, el resultado puede expresarse de forma equivalente en términos de frecuencia (en Hz), como:

$$X(F) = \mathcal{F}[\text{sinc}(Bt)] = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{F}{B}\right) \quad (48)$$

Ambos resultados se muestran a continuación en la Figura 9:

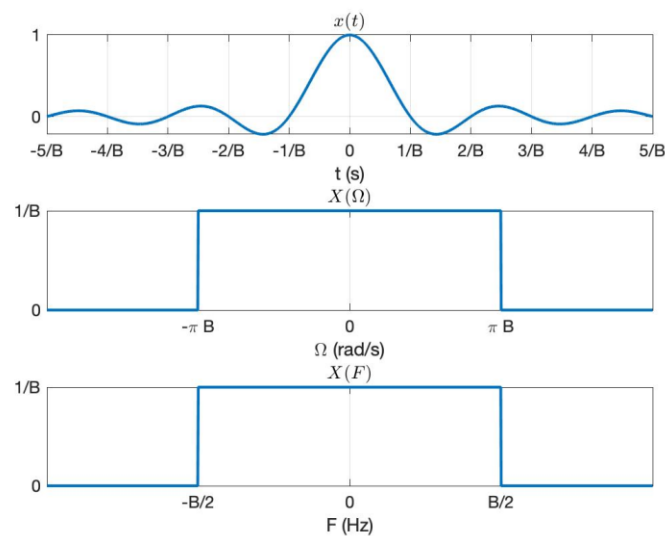


Figura 9. Representaciones gráficas de la señal sinc (arriba) y su transformada de Fourier en unidades de rad/seg (en medio) y en unidades de Hz (abajo).

2.1.7. Desplazamiento en el dominio frecuencial

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (49)$$

La propiedad de desplazamiento frecuencial de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0)} \quad (50)$$

allí donde Ω_0 es una constante, en general, real ($\Omega_0 \in \mathbb{R}$).

Ejemplo 6

Se pide hallar la transformada de Fourier de una señal exponencial compleja, $e^{j\Omega_0 t}$, la cual rota en el plano complejo con una frecuencia angular Ω_0 rad/s.

Solución

A pesar de ser una señal periódica, la señal exponencial compleja tiene una transformada de Fourier que puede obtenerse a partir de la propiedad de desplazamiento frecuencial, sin necesidad de hacer ningún cálculo adicional. Para ello podemos asumir que, en realidad, la señal exponencial compleja es el producto de una señal constante $x(t) = 1$ multiplicada por la exponencial compleja. A partir de (39), sabemos que la transformada de Fourier de una señal constante $x(t) = 1$ es $X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$. Por lo tanto, aplicando la propiedad del desplazamiento frecuencial, la transformada de Fourier de una señal exponencial compleja viene dada por:

$$\mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] = \mathcal{F}[1 \cdot e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (51)$$

2.1.8. Convolución

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales analógicas cualesquiera, tales que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (52)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\Omega) \quad (53)$$

La propiedad de convolución de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$\boxed{x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)Y(\Omega)} \quad (54)$$

Así pues, esta propiedad es un resultado muy relevante: **la operación convolución definida en el dominio del tiempo se convierte en un producto de señales en el dominio frecuencial.**

Ejemplo 7

Se pide hallar la transformada de Fourier de un pulso triangular de duración $2T$:

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & \text{para } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{para } t \notin [-T, T] \end{cases} \quad (55)$$

Solución

Para hallar la transformada de Fourier es interesante hacer notar que un pulso triangular de duración $2T$ puede verse como el resultado de convolucionar dos pulsos cuadrados de duración T , según:

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) = \frac{1}{T} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \quad (56)$$

Sabiendo este resultado, es posible hallar la transformada de Fourier del pulso triangular utilizando la propiedad de convolución, puesto que

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \mathcal{F} \left[\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) \right] = \frac{1}{T} \mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] = \frac{1}{T} \mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T} \left(\mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \right)^2 \end{aligned} \quad (57)$$

A partir del resultado en (17), sabemos que la transformada de Fourier de un pulso cuadrado de duración T viene dada por

$$\mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] = T \operatorname{sinc} \left(\frac{\Omega T}{2\pi} \right) \quad (58)$$

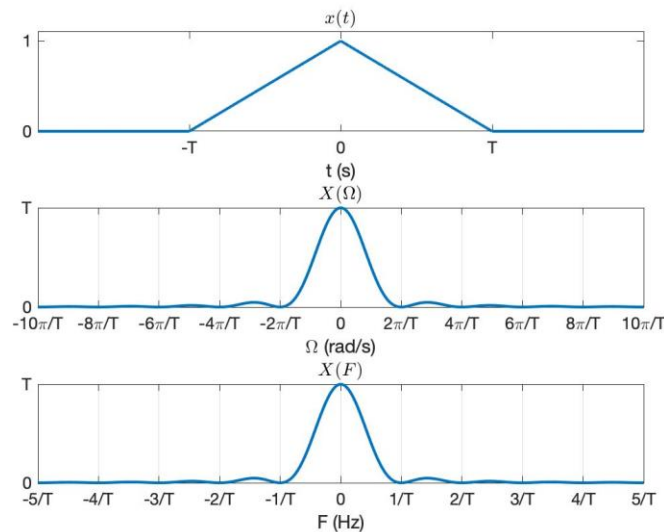


Figura 10. Pulso triangular en el dominio del tiempo (gráfica superior) y su transformada de Fourier según la ecuación (59) (gráfica central). Además, se muestra también la transformada de Fourier expresada en unidades de Hz , según la ecuación (60) (gráfica inferior).

Por tanto, el resultado de (57) queda así:

$$X(\Omega) = \mathcal{F} \left[\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right) \right] = \frac{1}{T} \left(\mathcal{F} \left[\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] \right)^2 = T \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\Omega T}{2\pi} \right) \quad (59)$$

O, equivalentemente, en unidades de Hz :

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\left[\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right] = T \text{sinc}^2(FT) \quad (60)$$

La representación gráfica de la transformada obtenida se muestra en la Figura 10.

2.1.9. Modulación

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales analógicas cualesquiera, tales que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (61)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\Omega) \quad (62)$$

La propiedad de convolución de la Transformada de Fourier consiste en que:

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega) \quad (63)$$

Es interesante observar que la propiedad de desplazamiento frecuencial (ver subapartado 2.1.7) puede verse como un caso particular de la propiedad de modulación. La relación es directa si se observa que, en (50), el desplazamiento frecuencial no es más que el producto de la señal $x(t)$ por otra señal $y(t)$, que en ese caso es una señal exponencial compleja, $y(t) = e^{j\Omega_0 t}$. Puesto que la transformada de Fourier de una exponencial compleja es una delta, $\mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$, el hecho de multiplicar la señal $x(t)$ por una exponencial compleja hace que la transformada de Fourier de $x(t)$, $X(\Omega)$, quede convolucionada con $2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$ y, por lo tanto, sufra un desplazamiento en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] &= \mathcal{F}[1 \cdot e^{j\Omega_0 t}] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[1] * \mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] = \frac{1}{2\pi} 2\pi\delta(\Omega) * 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \\ &= 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \quad (64)$$

2.1.10. Teorema de Parseval

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales analógicas cualesquiera, tales que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (65)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\Omega) \quad (66)$$

El Teorema de Parseval consiste en que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega \quad (67)$$

donde $y^*(t)$ e $Y^*(\Omega)$ son los complejos conjugados de $y(t)$ e $Y(\Omega)$, respectivamente.

Nótese que, para el caso particular en que $x(t) = y(t)$, sucede que $x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ y $X(\Omega)X^*(\Omega) = |X(\Omega)|^2$, con lo que el Teorema de Parseval permite concluir que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (68)$$

Es decir, que **la energía de una señal tanto puede calcularse en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia**. Esta importante conclusión ilustra bien el hecho de que la información contenida en la transformada de una señal es exactamente la misma que la contenida en la señal original.

¡Cuidado! Es incorrecto pensar, a partir del Teorema de Parseval, que $\mathcal{F}[y^*(t)] = Y^*(\Omega)$.

2.2. Simetría de la Transformada de Fourier

Muy habitualmente, conocer las propiedades de simetría que puede presentar la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ supone una ayuda para comprender la naturaleza de la propia señal o para simplificar los cálculos en ciertos desarrollos matemáticos. A continuación, se resumen las principales propiedades de simetría que presenta la Transformada de Fourier.

2.2.1. Simetría hermítica para señales reales

Sea $x(t)$ una señal analógica **real** cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (69)$$

Entonces, $X(\Omega)$ es una señal **hermítica**:

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad (70)$$

Las consecuencias más inmediatas e importantes de esta propiedad son las siguientes:

- **El módulo de $X(\Omega)$ es una señal par y la fase de $X(\Omega)$ es una señal impar:**

$$\boxed{|X(\Omega)| = |X^*(-\Omega)| = |X(-\Omega)|} \quad (71)$$

$$\boxed{\mathfrak{A}rg(X(\Omega)) = \mathfrak{A}rg(X^*(-\Omega)) = -\mathfrak{A}rg(X(-\Omega))} \quad (72)$$

- La parte real de $X(\Omega)$ es una señal par y la parte imaginaria de $X(\Omega)$ es una señal impar:

$$\mathfrak{Re}(X(\Omega)) = \mathfrak{Re}(X^*(-\Omega)) = \mathfrak{Re}(X(-\Omega)) \quad (73)$$

$$\mathfrak{Im}(X(\Omega)) = \mathfrak{Im}(X^*(-\Omega)) = -\mathfrak{Im}(X(-\Omega)) \quad (74)$$

2.2.2. Simetría antihermítica para señales imaginarias

Sea $x(t)$ una señal analógica imaginaria cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (75)$$

Entonces, $X(\Omega)$ es una señal antihermítica:

$$X(\Omega) = -X^*(-\Omega) \quad (76)$$

Queda propuesto como ejercicio para el lector hallar las consecuencias de esta propiedad en términos del módulo, la fase, la parte real y la parte imaginaria de $X(\Omega)$.

2.2.3. Conjugación

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (77)$$

La transformada de Fourier del complejo conjugado de la señal es el complejo conjugado de la transformada de Fourier de la señal original:

$$\boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(\Omega)} \quad (78)$$

2.2.4. Paridad

Sea $x(t)$ una señal analógica cualquiera, tal que:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad (79)$$

La paridad se conserva, es decir:

- Si $x(t)$ es una señal par, entonces $X(\Omega)$ es una señal par.
- Si $x(t)$ es una señal impar, entonces $X(\Omega)$ es una señal impar.

Globalmente, el conjunto de propiedades definidas en los subapartados 2.2.1-2.2.4 permite entender la simetría que presentan las transformadas de Fourier de ciertas señales.

Ejemplo 8

Supongamos que disponemos de una señal $x(t)$ real y con simetría par. ¿Qué podemos decir acerca de su transformada de Fourier $X(\Omega)$?

Solución

A partir de la propiedad de simetría hermítica, sabemos que, si $x(t)$ es real, entonces $X(\Omega)$ presenta simetría hermítica y, por tanto, $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$. Al mismo tiempo, como $x(t)$ es una señal par, la propiedad de conservación de la paridad nos dice que su transformada $X(\Omega)$ ha de mantener la misma simetría par y, por tanto, $X(\Omega) = X(-\Omega)$. Juntando ambos resultados tenemos que $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ y, al mismo tiempo, $X(\Omega) = X(-\Omega)$, lo cual implica afirmar que $X^*(-\Omega) = X(-\Omega)$. Para que esta última relación se cumpla, la única posibilidad es que $X(\Omega)$ sea real. Así pues, llegamos a una importante conclusión: **si tenemos una señal $x(t)$ real y par, entonces su transformada de Fourier $X(\Omega)$ es también una señal real y par.**

3. Consideraciones asintóticas de la Transformada de Fourier

Tras una primera toma de contacto con la Transformada de Fourier, es oportuno hacer una pausa para hacer énfasis en algunas propiedades que el lector quizás ya haya intuido y que hacen referencia al comportamiento asintótico de la Transformada de Fourier. Por un lado, se ha visto en la sección anterior que una señal limitada en tiempo, como es el pulso cuadrado, tiene una transformada de Fourier que presenta el comportamiento contrario, es decir, que se extiende a lo largo de todo el eje frecuencial (ver Figura 6). Ahora bien, la amplitud de la transformada se va haciendo gradualmente más pequeño a medida que aumenta la frecuencia. Este efecto no es casual y será tratado en el apartado 3.1. Este comportamiento es muy importante, ya que tiene consecuencias, por ejemplo, en el diseño de filtros.

Por otro lado, este mismo comportamiento en frecuencia plantea la duda de hasta qué frecuencia es necesario considerar para tener una representación suficientemente fiel de una señal. Aunque la representación en el dominio de la frecuencia se extienda a lo largo de todas las frecuencias, el hecho de que gradualmente la contribución de las frecuencias más altas sea menor, hace pensar que es posible truncar a partir de una cierta frecuencia máxima y limitar la representación frecuencial a un ancho de banda limitado. El truncamiento en el dominio de la frecuencia tiene consecuencias en el dominio temporal que serán objeto de estudio en el apartado 3.2, con lo que se conoce como el fenómeno de Gibbs.

3.1. Decaimiento en frecuencia

Una de las observaciones que puede extraerse de las propiedades que se han visto hasta ahora es que las señales suaves en el dominio del tiempo llevan aparejadas transformadas de Fourier que presentan un comportamiento abrupto en frecuencia. Es decir, señales suaves en el dominio del tiempo presentan transformadas de Fourier que decaen rápidamente. Un ejemplo de señal suave es la función sinc que se analizó en el Ejemplo 5, donde se vio que su transformada de Fourier viene dada por un pulso cuadrado, el cual presenta una caída muy rápida y abrupta a medida que la frecuencia aumenta.

Esta observación no es casual y responde a una relación entre la «suavidad» de una señal y la caída en frecuencia de su transformada de Fourier que puede explicarse a través de los teoremas de Schwartz y Paley-Wiener. Para cuantificar la suavidad de una señal, se suele utilizar como criterio el número de derivadas continuas que presenta dicha señal. Si denotamos la primera derivada que presenta alguna discontinuidad como la derivada n -ésima, estos teoremas indican que la transformada de Fourier correspondiente presenta un **decaimiento en frecuencia** del tipo $1/\Omega^{n+1}$. Por lo tanto, de forma muy simplificada y eludiendo muchos detalles, podríamos decir que

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{|X(\Omega)|}{\Omega^{n+1}} = C \quad (80)$$

para una cierta constante $C > 0$.

Ejemplo 9

Se pide determinar el decaimiento en frecuencia de un pulso cuadrado.

Solución

En el caso de un pulso cuadrado, la propia señal ya presenta discontinuidades, con lo cual no es necesario siquiera derivar, puesto que la primera derivada con discontinuidades podríamos decir que es $n = 0$. Según el teorema anterior, la transformada de Fourier del pulso cuadrado presenta un decaimiento en frecuencia proporcional a $1/\Omega$.

Ejemplo 10

Se pide determinar el decaimiento en frecuencia de un pulso triangular.

Solución

En este caso, la propia señal sí que es continua, con lo cual podemos calcular su primera derivada. Ello da lugar a una función que es constante en cada vertiente del pulso triangular, pero que presenta una discontinuidad en el origen. Por lo tanto, la primera derivada con discontinuidades es $n = 1$. De esta forma podemos afirmar que la transformada de Fourier del pulso triangular presenta un decaimiento proporcional a $1/\Omega^2$.

Para ilustrar estos ejemplos, la Figura 11 presenta tres tipos de pulsos con sus derivadas correspondientes hasta llegar a la primera derivada con discontinuidades. Se presentan los pulsos cuadrado y triangular, así como un tercer pulso con un mayor grado de suavidad.

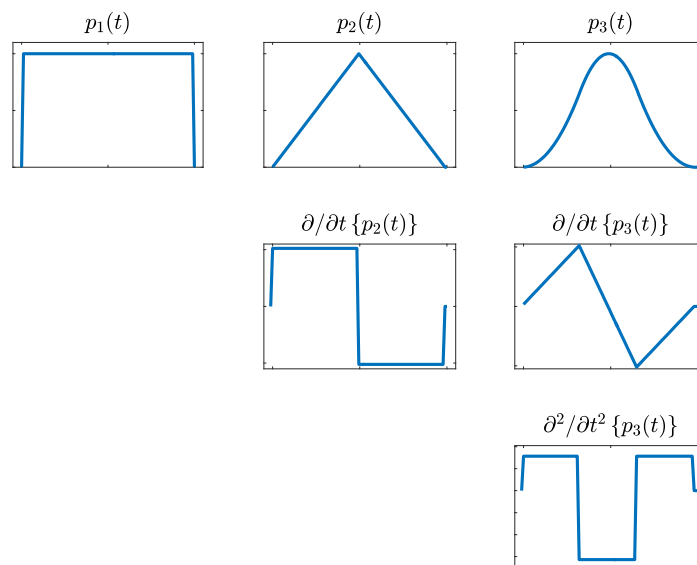


Figura 11. Ejemplo de tres pulsos en el dominio temporal y sus correspondientes derivadas hasta la primera con discontinuidades. Nótese que el pulso cuadrado, $p_1(t)$, ya presenta discontinuidades, con lo cual no es necesario derivarlo.

Las transformadas de Fourier correspondientes se muestran en la Figura 12, donde puede observarse claramente la tendencia de decaimiento según $1/\Omega$, $1/\Omega^2$ o $1/\Omega^3$ para los tres

pulsos considerados. De esta forma, se puede visualizar cómo sucede que, **cuanto más suave es una señal en el dominio del tiempo, más abrupta es su transformada de Fourier**.

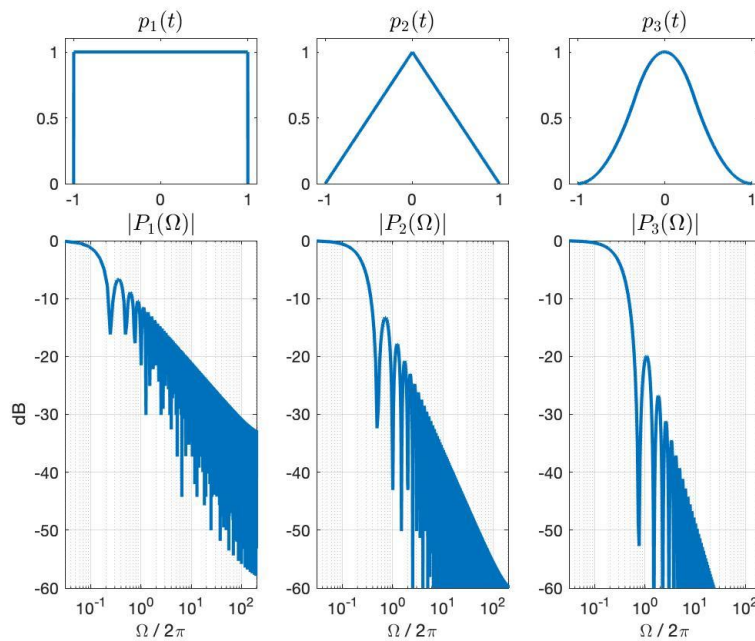


Figura 12. Transformadas de Fourier correspondientes a los pulsos de la Figura 11, donde se aprecia claramente que cuanto más suave es la señal en tiempo, más abrupta es su transformada de Fourier.

3.2. El fenómeno de Gibbs

El fenómeno de Gibbs está en cierto modo relacionado con la propiedad de decaimiento asintótico que presenta la transformada de Fourier. Como se ha visto en el apartado anterior, una señal suave en el dominio temporal presenta una transformada de Fourier que decae de forma abrupta. De forma dual, puede afirmarse que una señal abrupta en el dominio temporal presenta una transformada de Fourier suave y, por tanto, un contenido frecuencial que se extiende a lo largo de un conjunto de frecuencias asintóticamente grande. Un ejemplo es el caso de la señal escalón unitario, cuya transformada de Fourier es (ver Ejemplo 4):

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \quad (81)$$

La discontinuidad del escalón da lugar al término $1/j\Omega$ en su transformada de Fourier y este término se extiende a lo largo de todo el dominio de la frecuencia. Como consecuencia, el ancho de banda de la señal escalón unitario es infinito.

Si bien a nivel teórico es posible considerar señales de ancho de banda infinito, en la práctica esto no suele ser así. La razón principal es que los dispositivos a través de los cuales observamos y procesamos señales suelen estar limitados a un cierto ancho de banda. Eso hace que a la salida de estos dispositivos tengamos siempre señales de ancho de banda limitado. Hay casos en los que esta limitación en banda ocurre de forma involuntaria, como por ejemplo en el caso de observar una señal a través de un osciloscopio. Aunque los filtros de entrada de

estos dispositivos suelen tener un ancho de banda muy grande, del orden de GHz , este valor es finito y, por tanto, las señales de ancho de banda infinito quedan truncadas en frecuencia a su salida. Hay casos, sin embargo, donde interesa forzar de forma voluntaria que las señales de interés estén limitadas a un cierto ancho de banda. Este es el caso de los sistemas de comunicaciones inalámbricas, donde las señales emitidas por el transmisor han de compartir el espectro radioeléctrico con señales de otros sistemas y, por tanto, han de ceñirse a una ocupación espectral muy concreta, determinada por el organismo regulador del espectro. Si la ocupación espectral excediera de los límites fijados, podría causarse interferencia a otros sistemas o usuarios que utilizan zonas del espectro radioeléctrico adyacentes.

En estas situaciones, cabe preguntarse: ¿Cuál es el impacto de limitar en banda una señal que originalmente tiene ancho de banda infinito? Como ejemplo, utilizaremos la señal escalón unitario, $u(t)$, puesto que, como se ha comentado anteriormente, presenta una discontinuidad y, por tanto, su ancho de banda es infinito. Para modelar la limitación en banda, utilizaremos un filtro paso-bajo ideal cuya respuesta en frecuencia es un pulso cuadrado que cubre el rango de frecuencias $\Omega \in [-W, W]$, para un cierto valor de W . Esto es, un sistema LIT cuya respuesta en frecuencia es la siguiente (más sobre la respuesta frecuencia de sistemas LIT en la sección 6 de este mismo módulo):

$$H(\Omega) = \Pi\left(\frac{\Omega}{2W}\right) \quad (82)$$

Aprovechando el resultado del Ejemplo 5, sabemos que este filtro paso-bajo ideal posee la respuesta impulsional siguiente:

$$h(t) = 2B \text{sinc}(2Bt) \quad (83)$$

siendo $B = W/2\pi$ el ancho de banda del filtro expresado en Hz. Así, la respuesta a una señal escalón unitario de este filtro paso-bajo es una señal escalón limitada en banda:

$$u_b(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \lambda) 2B \text{sinc}(2B\lambda) d\lambda \quad (84)$$

El resultado se muestra en la Figura 13 para tres anchos de banda diferentes, donde puede verse cómo **la principal característica del escalón limitado en banda es la aparición de un rizado en la vecindad de la discontinuidad**.

Este rizado presenta varios aspectos interesantes. El primero de ellos es que a medida que el ancho de banda aumenta, el rizado se comprime hacia la discontinuidad y tiende a hacerse imperceptible. Como consecuencia de ello, **a medida que se aumenta el ancho de banda, el escalón filtrado tiende a parecerse más al escalón original**.

El segundo aspecto es que **el exceso de amplitud debido al rizado (algo que inglés se conoce como *overshoot*) se mantiene constante independientemente del ancho de banda**.

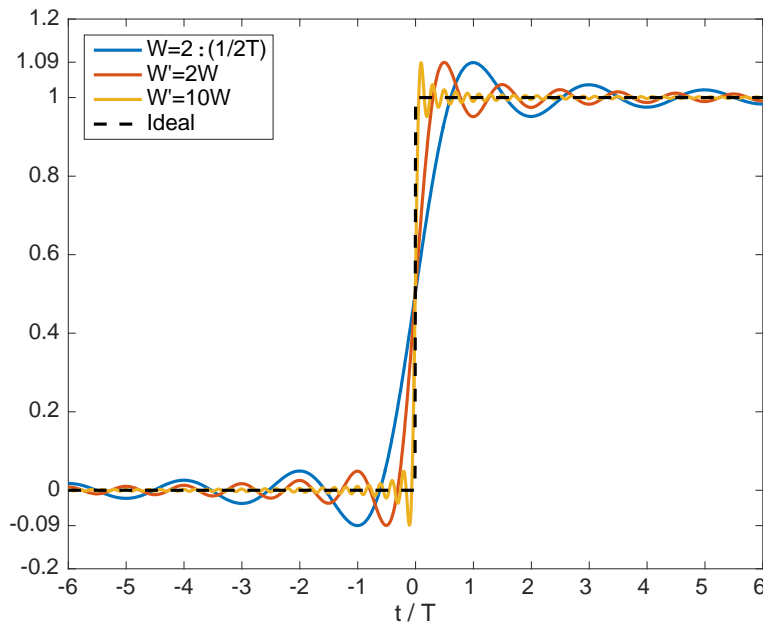


Figura 13. Ilustración del fenómeno de Gibbs para una señal escalón, en el caso de limitar su transformada de Fourier a un ancho de banda W , $2W$ y $10W$.

Este exceso de amplitud aparece en el instante $t_{\text{exc}}(B) = 1/2B$ y su valor viene dado por:

$$\begin{aligned} u_b(t_{\text{exc}}(B)) &= \int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{1}{2B} - \lambda\right) 2B \text{sinc}(2B\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2B}} 2B \text{sinc}(2B\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^1 \text{sinc}(\beta) d\beta \approx 1.09 \end{aligned} \quad (85)$$

Como se ve en (85), el resultado no depende del ancho de banda: es constante. Esto puede parecer raro, pues es lógico pensar que, si el ancho de banda es lo bastante grande, el escalón limitado en banda tendría que converger al escalón ideal y el exceso de amplitud debería desaparecer. Si bien esto es cierto, cabe remarcar que la condición solo se cumple en el límite $\{W, B\} \rightarrow \infty$. En tal caso, $\lim_{B \rightarrow \infty} t_{\text{exc}}(B) = 0$ y el instante de tiempo del exceso de error coincide con el instante de la transición del escalón. Si esto se cumple, el escalón filtrado toma el valor:

$$u_b(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-\lambda) 2B \text{sinc}(2B\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^0 2B \text{sinc}(2B\lambda) d\lambda = 0.5 \quad (86)$$

Este valor coincide con el punto medio de la transición del escalón. Este es exactamente el mismo valor que presenta el escalón ideal en la transición, con lo cual tenemos que el escalón limitado en banda y el escalón ideal coinciden, pero únicamente para $\{W, B\} \rightarrow \infty$.

Este fenómeno es conocido como el **fenómeno de Gibbs**, en honor al matemático Josiah W. Gibbs, que investigó este efecto y dio justificación al mismo en el año 1899, y muestra la dificultad de reproducir el comportamiento de una señal discontinua mediante una señal de ancho de banda limitado.

4. Transformada de Fourier de señales periódicas

Hasta aquí se ha considerado que las señales temporales sobre las que se calcula la transformada de Fourier son señales aperiódicas. Ello permite centrarse en las propiedades de la transformada de Fourier, así como en la relación entre el tiempo y la frecuencia. A continuación, se da un paso más considerando señales que son periódicas en el dominio del tiempo. El objetivo es describir cómo las herramientas presentadas hasta ahora pueden ser utilizadas igualmente para obtener la transformada de Fourier correspondiente.

Para ello se presenta en el apartado 4.1 cómo una señal periódica cualquiera puede ser obtenida a partir de la repetición de una señal aperiódica. Ello permite obtener la transformada de Fourier de una señal periódica a partir de la transformada de Fourier la señal aperiódica que la forma y de las propiedades de dualidad y modulación presentadas, respectivamente, en los subapartados 2.1.6 y 2.1.9 de este mismo módulo. Posteriormente, se presenta una forma alternativa de calcular la transformada de Fourier de una señal básica basada en la observación siguiente: toda señal periódica puede descomponerse como el resultado de la suma ponderada de señales sinusoidales a frecuencias múltiplo de la frecuencia fundamental de la señal periódica. Esta descomposición se conoce como Serie de Fourier y es el objeto de estudio del apartado 4.2.

4.1. Interpretación de señales periódicas como repetición de una señal aperiódica

Como ya sabemos, una señal periódica $x_p(t)$ cualquiera puede expresarse como la repetición cada T segundos de una cierta señal básica de duración finita $x_b(t)$. En tal caso, T es el denominado «periodo fundamental» de $x_p(t)$ y acostumbra a decirse que $x_p(t)$ es el resultado de la «extensión periódica de periodo T » de $x_b(t)$. Si, además, la duración de $x_b(t)$ es menor o igual que T (que suele ser lo habitual), entonces $x_b(t)$ coincide con el denominado «periodo básico» de $x_p(t)$. Es decir:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT) \quad (87)$$

Asimismo, también sabemos que, gracias a las propiedades de la operación convolución, esta extensión periódica de una señal básica puede obtenerse mediante una convolución. En concreto, la señal periódica $x_p(t)$ de periodo T es el resultado de la convolución de la señal básica $x_b(t)$ con un tren de deltas de Dirac de periodo T (el cual ya es en sí mismo una señal periódica resultante de la extensión periódica de periodo de T de una delta de Dirac):

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT) = x_b(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (88)$$

Este resultado es ilustrado en la Figura 14:

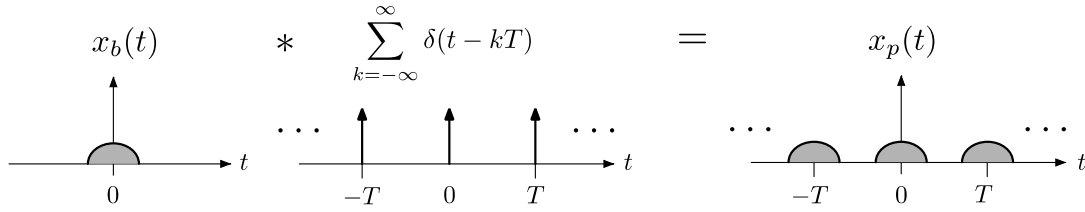


Figura 14. Interpretación de una señal periódica de periodo T como el resultado de la convolución de una señal básica con un tren de deltas de periodo T .

Esta interpretación permite calcular la transformada de Fourier de una señal periódica de forma muy sencilla, aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier que se han visto anteriormente, así como la existencia de la función delta de Dirac. La clave reside aplicar directamente la Transformada de Fourier sobre la convolución expresada en (88). Puesto que tenemos la convolución entre dos señales, podemos aprovechar la propiedad de convolución de la Transformada de Fourier (ya presentada en el subapartado 2.1.8 de este mismo módulo) y obtener la transformada de Fourier de $x_p(t)$ como el resultado del producto de las transformadas de Fourier de $x_b(t)$ y del tren de deltas de periodo T :

$$X_p(\Omega) \doteq \mathcal{F}[x_p(t)] = \mathcal{F}[x_b(t)] \cdot \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right] \quad (89)$$

Por un lado, denotamos la transformada de Fourier de la señal básica según $X_b(\Omega) \doteq \mathcal{F}[x_b(t)]$ y, por otro lado, en lo que respecta al tren de deltas, tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\delta(t - kT)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega kT} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (90)$$

Para resolver el último paso de (90) se ha hecho uso de la fórmula de Poisson. Aclarado lo cual, tenemos que la transformada de Fourier de una señal periódica puede obtenerse como:

$$X_p(\Omega) = X_b(\Omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (91)$$

Este resultado es interesante porque muestra de forma muy clara que una señal periódica en el dominio del tiempo da lugar a una transformada de Fourier «discretizada» en el dominio frecuencial, ya que está formada únicamente por un conjunto de deltas de Dirac equiespaciadas en frecuencia. Es decir, reescribiendo (91), tenemos que:

$$X_p(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_b\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (92)$$

Ejemplo 11

Se pide hallar la transformada de Fourier de la señal periódica $x_p(t)$ que se muestra en la figura a continuación, allí donde $T = 2\Delta$:

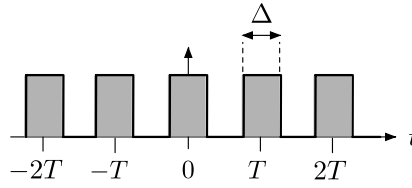


Figura 15. Señal periódica cuadrada de periodo fundamental $T = 2\Delta$.

Solución

Observamos que se trata de una señal periódica de periodo T , resultante de la extensión periódica de periodo T de la señal básica $x_b(t) = \Pi(t/\Delta)$, que es un pulso cuadrado de duración Δ :

$$x_p(t) = x_b(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (93)$$

Puesto que la duración de $x_b(t)$ no es superior al periodo fundamental de $x_p(t)$ (es decir, puesto que $\Delta < T$), $x_b(t)$ resulta ser el periodo básico de $x_p(t)$ y define lo que habitualmente se denomina su «forma de onda».

Aplicando la transformada de Fourier en (93), tenemos que:

$$\begin{aligned} X_p(\Omega) &= X_b(\Omega) \cdot \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right] = \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] \cdot \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right] \\ &= \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Omega\Delta}{2\pi}\right) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned} \quad (94)$$

Este último resultado puede expresarse también de este modo:

$$X_p(\Omega) = \frac{2\pi\Delta}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k}{T}\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (95)$$

Las representaciones gráficas de las señales involucradas en (93)-(95) se muestran en la Figura 16.

Asimismo, es interesante observar a partir de (95) que, en caso de tener $\Delta = T$, entonces resulta que $\text{sinc}(\Delta k/T) = \text{sinc}(k)$. Puesto que la función sinc toma los valores

$$\text{sinc}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (96)$$

con $k \in \mathbb{Z}$, sucede que la transformada de Fourier de (95) se convierte en

$$X_p(\Omega)|_{\Delta=T} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k) \delta\left(\Omega - \frac{k}{T}\right) = 2\pi \delta(\Omega) \quad (97)$$

Este último resultado es coherente con el hecho de que, para $\Delta = T$, la señal $x_p(t)$ se convierte en una señal constante de amplitud 1: $x_p(t)|_{\Delta=T} = 1$. Siendo ahora una señal constante, su transformada de Fourier se corresponde con una delta de Dirac, tal y como ya vimos en (39) y en la Figura 8.

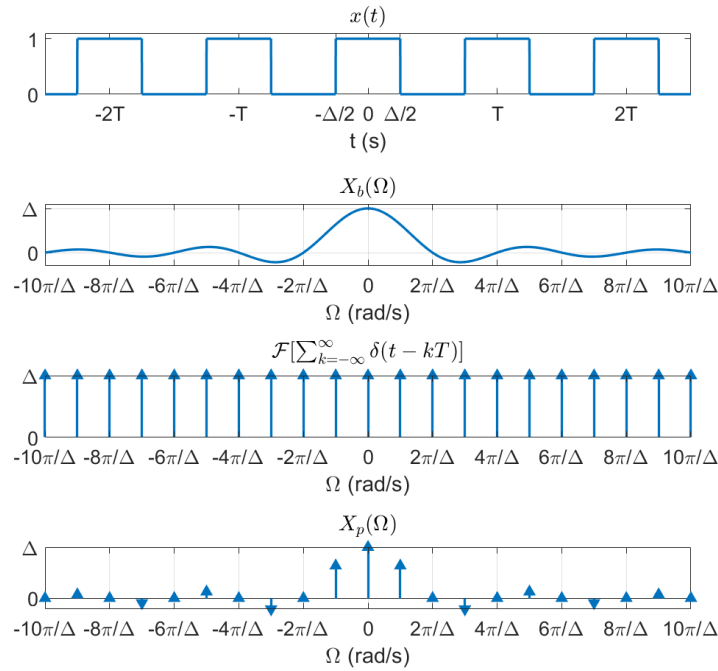


Figura 16. Señal cuadrada periódica (gráfica superior) y su transformada de Fourier (gráfica inferior). Las dos gráficas intermedias muestran respectivamente las transformadas de Fourier de las dos señales intermedias que se han utilizado: la transformada de Fourier de la señal básica y la transformada de Fourier del tren de deltas de Dirac.

4.2. Relación entre la Transformada de Fourier y la Serie de Fourier

Si $x_p(t)$ es una señal periódica de periodo fundamental T y cumple las condiciones de Dirichlet dentro de un periodo, entonces puede descomponerse según la siguiente serie:

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_0 t) \quad (98)$$

allí donde $\Omega_0 \doteq 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental de $x_p(t)$ expresada en *rad/seg* y donde los coeficientes a_0 , $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtienen según:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x_p(t) dt \quad (99)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x_p(t) \cos(n\Omega_0 t) dt \quad (100)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x_p(t) \sin(n\Omega_0 t) dt \quad (101)$$

siendo α un *offset* temporal que puede fijarse según convenga para hacer más fácil la integración. Por defecto, se puede fijar $\alpha = 0$.

Esta descomposición es conocida como la **Serie de Fourier**² de $x_p(t)$.

Además, sabemos que las señales seno y coseno están relacionadas con la señal exponencial compleja a través de la fórmula de Euler, con lo cual tenemos que:

$$\cos(n\Omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\Omega_0 t} + e^{-jn\Omega_0 t}) \quad (102)$$

$$\sin(n\Omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\Omega_0 t} - e^{-jn\Omega_0 t}) \quad (103)$$

Sustituyendo estas expresiones en la serie de Fourier de (98), obtenemos que:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{jn\Omega_0 t} + e^{-jn\Omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2j}(e^{jn\Omega_0 t} - e^{-jn\Omega_0 t}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)e^{jn\Omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)e^{-jn\Omega_0 t} \end{aligned} \quad (104)$$

Este último resultado puede expresarse de forma compacta, dando lugar a **la expresión del desarrollo en Serie de Fourier mediante exponenciales complejas**:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t} \quad (105)$$

allí donde los coeficientes c_n vienen dados por:

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - jb_n}{2} & \text{para } n > 0 \\ \frac{a_n}{2} & \text{para } n = 0 \\ \frac{a_n + jb_n}{2} & \text{para } n < 0 \end{cases} \quad (106)$$

El resultado obtenido en (105) muestra de forma muy clara el hecho de que la transformada de Fourier de cualquier señal periódica resulta ser una señal «discretizada» en el dominio frecuencial, puesto que:

$$X_p(\Omega) \doteq \mathcal{F}[x_p(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega_0 t}] \quad (107)$$

Por tanto:

$$X_p(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\Omega - n\Omega_0) \quad (108)$$

² El lector interesado puede encontrar una reseña histórica sobre el descubrimiento de la Serie de Fourier y los personajes que intervinieron en ella en (Oppenheim, Willsky, & Nawab, Signals & Systems, 1996, págs. 162-166).

Si ahora comparamos (108) con (92), vemos que los coeficientes c_n de la serie de Fourier de $x_p(t)$ guardan una estrecha relación con la transformada de Fourier del periodo básico de $x_p(t)$:

$$c_n = \frac{1}{T} X_b \left(\frac{2\pi}{T} n \right) = \frac{1}{T} X_b(n\Omega_0) \quad (109)$$

con lo que:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \quad (110)$$

De esta forma, se confirma que el procedimiento presentado en el apartado 4.1 es equivalente al presentado ahora en el apartado 4.2 en términos de la Serie de Fourier. Para reforzar esta afirmación, el siguiente ejemplo muestra cómo obtener la transformada de Fourier de la señal periódica utilizada en el Ejemplo 11. Como se verá, ambos resultados son idénticos.

Ejemplo 12

Se pide hallar la transformada de Fourier de la señal periódica $x_p(t)$ del Ejemplo 11 utilizando la Serie de Fourier.

Solución

De entrada, ya sabemos que la transformada de Fourier que buscamos tendrá la siguiente expresión:

$$X_p(\Omega) = \mathcal{F}[x_p(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\Omega - n\Omega_0) \quad (111)$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/T$ (puesto que el periodo fundamental de $x_p(t)$ es T) y donde la única incógnita son los coeficientes c_n , cuyos valores pueden obtenerse a partir de la ecuación (110):

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \quad (112)$$

El *offset* temporal α lo fijaremos por comodidad en $\alpha = -T/2$, ya que, de esta forma, la integral nos quedará centrada en el origen. En este caso, la integral que buscamos no es más que la transformada de Fourier de un pulso cuadrado de duración Δ , evaluada a las frecuencias discretas $\Omega = n\Omega_0$. Esto es:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right) e^{-jn\Omega_0 t} dt \quad (113)$$

A partir de (17), conocemos la transformada de Fourier de un pulso cuadrado de duración Δ :

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] = \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Omega\Delta}{2\pi}\right) \quad (114)$$

con lo que los coeficientes de la serie de Fourier que buscamos resultan ser:

$$c_n = \frac{1}{T} \mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{\Delta} \right) \right]_{\Omega = n\Omega_0} = \frac{\Delta}{T} \text{sinc} \left(\frac{n\Omega_0\Delta}{2\pi} \right) \quad (115)$$

Sustituyendo estos coeficientes en la expresión de la serie de Fourier en (111) y teniendo en cuenta que $\Omega_0 = 2\pi/T$, la transformada de Fourier que buscamos resulta ser:

$$X_p(\Omega) = \frac{2\pi\Delta}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{\Delta n}{T} \right) \delta \left(\Omega - \frac{2\pi n}{T} \right) \quad (116)$$

Nótese que este resultado coincide con el obtenido en (95), confirmando que ambos procedimientos para calcular la transformada de Fourier de una señal periódica son equivalentes.

5. Resumen de resultados y propiedades de la transformada de Fourier

Para calcular la transformada de Fourier de una señal es siempre importante recordar dos cosas:

1. Las transformadas de Fourier de ciertas señales típicas.
2. Las propiedades de la Transformada de Fourier.

Ello es debido a que una señal puede expresarse habitualmente como combinación de otras señales ya conocidas. Por lo tanto, si conocemos de antemano las transformadas de Fourier de esas señales típicas, podemos encontrar la transformada de Fourier que buscamos de forma mucho más directa y sencilla, ahorrándonos el cálculo paso a paso de la ecuación de análisis definida en (4). Además, también es muy habitual que esta combinación de señales de la que estamos hablando implique transformaciones de las señales típicas implicadas directamente relacionadas con las propiedades de la Transformada de Fourier.

Por ejemplo: si buscamos la transformada de Fourier de una señal que es producto de otras dos, la propiedad de modulación nos indica que el producto en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia, de manera que ya sabemos que la transformada de Fourier que buscamos es la convolución de las transformadas de Fourier de las señales que se están multiplicando. Si conocemos de antemano cada una de estas transformadas de Fourier, ya tenemos la solución: la transformada de Fourier que buscamos es la convolución de estas dos transformadas de Fourier ya conocidas. Nos hemos evitado, por tanto, tener que pasar por la ecuación de análisis de la transformada de Fourier y hemos podido encontrar la solución de forma sencilla utilizando resultados conocidos.

El objetivo de esta sección es resumir estos resultados ya conocidos, es decir: las transformadas de Fourier de señales típicas (apartado 5.1) y las propiedades de la Transformada de Fourier (apartado 5.2).

5.1. Tabla-resumen de transformadas de Fourier de señales típicas

A continuación se presenta un resumen de diversas señales típicas y sus correspondientes transformadas de Fourier. En muchos casos, se trata de resultados que provienen de la aplicación de las propiedades de la Transformada de Fourier presentadas en la sección 2.

Señal típica	$x(t)$	$X(\Omega)$
Exponencial compleja	$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
Coseno	$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi(\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0))$
Seno	$\sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}(\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0))$

Constante	A	$2\pi A\delta(\Omega)$
Delta de Dirac	$\delta(t)$	1
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$
Exponencial por escalón	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\Omega}$
Signo	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
Pulso cuadrado	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\text{sinc}\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$
Pulso triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$	$T\text{sinc}^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$
Sinc	$\text{sinc}(Bt)$	$\frac{1}{B}\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B}\right)$
Tren de deltas	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$
Señal periódica genérica	$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b(t - kT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_b\left(\frac{2\pi}{T}n\right) \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$

Tabla 1. Transformadas de Fourier de señales típicas, para $X(\Omega) = \mathcal{F}[x(t)]$; $\Omega_0, \alpha, T, B \in \mathbb{R}$, con $T, B > 0$; $A \in \mathbb{C}$.

5.2. Tabla-resumen de propiedades de la Transformada de Fourier

A continuación se presenta un resumen de las principales propiedades de la transformada de Fourier, ya presentadas en la sección 2.

Propiedad	Definición
Linealidad	$\sum_{i=1}^k a_i x_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^k a_i X_i(\Omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)e^{-j\Omega t_0}$
Escalado temporal	$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ a } X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
Derivación en el dominio temporal	$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega X(\Omega)$
Integración en el dominio temporal	$\int_{-\infty}^t x(\lambda)d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{X(\Omega)}{j\Omega}$
Dualidad	$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega)$
Desplazamiento frecuencial	$x(t)e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega - \Omega_0)$
Convolución	$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)Y(\Omega)$
Modulación	$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$

Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)Y^*(\Omega)d\Omega$
Simetría para señales reales	$x(t) \text{ señal par} \Rightarrow \begin{cases} X(\Omega) \text{ señal par} \\ \mathfrak{I}rg(X(\Omega)) \text{ señal impar} \end{cases}$
Paridad	$\begin{aligned} x(t) \text{ señal par} &\Rightarrow X(\Omega) \text{ señal par} \\ x(t) \text{ señal impar} &\Rightarrow X(\Omega) \text{ señal impar} \end{aligned}$

Tabla 2. Principales propiedades de la Transformada de Fourier, allí donde $X(\Omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $Y(\Omega) = \mathcal{F}[y(t)]$; $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$; $t_0, a, \Omega_0 \in \mathbb{R}$.

6. Caracterización de sistemas LIT analógicos mediante la Transformada de Fourier

En la sección 1 de este módulo se estableció la relación existente entre la Transformada de Fourier y la Transformada de Laplace. Como ya vimos en el módulo anterior, la Transformada de Laplace es ampliamente utilizada en el análisis de sistemas analógicos LIT, ya que permite analizar la relación entre la entrada y la salida de un sistema a través de una operación sencilla. En particular, a través del producto entre la transformada de Laplace de la señal de entrada y la denominada función de transferencia del sistema. Dicha función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta impulsional del sistema y caracteriza completamente al sistema, tal y como lo hace también la respuesta impulsional.

El objetivo de esta sección es presentar cómo el mismo procedimiento puede llevarse a cabo mediante la Transformada de Fourier, estableciendo el paralelismo entre la función de transferencia y la respuesta frecuencial de un sistema (apartado 6.1) y entre la convolución temporal y el producto frecuencial (apartado 6.2). Finalmente, en el apartado 6.3 se introduce el concepto de filtro en frecuencia y se presentan algunos ejemplos habituales en la práctica.

6.1. La relación entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia

En el módulo anterior, se estudió cómo la Transformada de Laplace permite expresar la relación entre la entrada y la salida de un sistema LIT mediante la función de transferencia del sistema. Y al principio del presente módulo, en (1), hemos visto que, para el caso particular en el que la señal de entrada es de tipo exponencial compleja, $x(t) = e^{st}$ con $s \in \mathbb{C}$, la señal de salida del sistema, $y(t)$, es igual a la entrada ponderada por un factor de escala $H(s)$. Esta señal $H(s)$ de variable compleja es justamente la función de transferencia del sistema, es decir, la transformada de Laplace de la respuesta impulsional $h(t)$:

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{s(t-\lambda)} d\lambda = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda}_{H(s)} = e^{st} H(s) \quad (117)$$

También es posible obtener un resultado análogo a este mediante la Transformada de Fourier, puesto que, como ya sabemos, esta no es más que la Transformada de Laplace particularizada para $s = j\Omega$. Así pues, particularizando (117) para $s = j\Omega$, tenemos que la señal de entrada se convierte en una señal exponencial compleja a una cierta frecuencia Ω y que la señal de salida es esa misma exponencial compleja ponderada por un factor de escala $H(j\Omega)$, que no es más que la respuesta del sistema a una cierta frecuencia Ω . Es decir:

$$y(t) = e^{j\Omega t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{j\Omega(t-\lambda)} d\lambda = e^{j\Omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\Omega \lambda} d\lambda}_{H(\Omega)} = e^{j\Omega t} H(\Omega) \quad (118)$$

El conjunto de respuestas del sistema $H(\Omega)$ correspondiente al conjunto de frecuencias $\Omega \in (-\infty, \infty)$ es denominado la **respuesta en frecuencia del sistema** y es el resultado de la **transformada de Fourier de la respuesta impulsional del sistema**. Esto es:

$$H(\Omega) \doteq \mathcal{F}[h(t)] \quad (119)$$

Como toda transformada de Fourier, la respuesta frecuencial $H(\Omega)$ es, en general, una señal compleja, como también lo es, en general, la función de transferencia $H(s)$ en el dominio de Laplace. Ahora bien, mientras $H(s)$ es una señal compleja de variable compleja, $H(\Omega)$ es una señal compleja de variable real. Ambas respuestas están íntimamente relacionadas, puesto que, como ya se ha comentado, la Transformada de Fourier no es más que la Transformada de Laplace particularizada para $s = j\Omega$.

En general, como ya vimos en el apartado 1.4 del presente módulo, la condición de existencia de $H(\Omega)$ puede expresarse en términos de la naturaleza de $H(s)$: **si la ROC de $H(s)$ incluye el eje imaginario del plano s (es decir, $s = j\Omega$), entonces existe $H(\Omega)$** . Recuérdese que esta condición de existencia es suficiente, pero no necesaria. Y obsérvese también que esta condición de existencia de la Transformada de Fourier coincide justamente con la condición (en este caso, necesaria y suficiente) que cumple todo sistema LIT estable, a saber: **un sistema LIT es estable si y solo si la ROC de su función de transferencia incluye el eje imaginario del plano s** .

Por lo tanto, podemos concluir que **todo sistema LIT estable tiene respuesta en frecuencia**, si bien hay sistemas LIT no estables cuya respuesta en frecuencia también es calculable. De este modo, si $H(s)$ es la función de transferencia de un sistema LIT estable, entonces la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de dicho sistema es tal que:

$$H(\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} \quad (120)$$

Esta relación tan directa entre $H(\Omega)$ y $H(s)$ permite establecer, en particular, una conexión también muy directa entre los polos y ceros de $H(s)$ y la forma de $H(\Omega)$. Para ilustrar más detalladamente esta conexión, se plantea el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13

Consideremos un sistema estable cuya función de transferencia viene dada por

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad (121)$$

con $\alpha > 0$. Se pide analizar cómo el polo que esta función de transferencia presenta en $s = -\alpha$ afecta a la respuesta en frecuencia del sistema.

Solución

De entrada, puesto que el sistema es estable, ya sabemos que esta $H(s)$ es la función de transferencia de un sistema LIT cuya respuesta impulsional es una señal exponencial multiplicada por un escalón unitario:

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad \Re(s) > -\alpha \quad (122)$$

Obsérvese que la *ROC* definida en (122) es la región del plano s que queda a la derecha de la recta $\Re(s) = -\alpha$. Por tanto, dado que $\alpha > 0$, esta *ROC* incluye el eje imaginario del plano s (condición de estabilidad del sistema).

Así pues, ya sabemos que la respuesta frecuencial de este sistema es calculable y que podemos obtenerla particularizando su función de transferencia para $s = j\Omega$:

$$H(\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{1}{j\Omega + \alpha} \quad (123)$$

Nótese que esta expresión coincide con la hallada en el subapartado 1.5.2 para la transformada de Fourier de una señal exponencial multiplicada por un escalón, cuya representación gráfica quedó mostrada en la Figura 5.

Por lo tanto, el comportamiento de la respuesta frecuencial $H(\Omega)$ se puede inferir en base al comportamiento de la función de transferencia $H(s)$ a lo largo del eje imaginario puro (es decir, en $s = j\Omega$). Vemos en (121) que toda la información de $H(s)$ está contenida en su denominador (*i.e.* se trata de un sistema «todo polos»), al cual denominaremos $D(s)$, con lo que:

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} \Rightarrow D(s) = s + \alpha \quad (124)$$

Ahora, este denominador $D(s)$ puede ser interpretado como un vector en el plano complejo (*i.e.* el plano s). Esto es, $D(s)$ es el vector que va desde el punto del plano $(-\alpha, 0)$, que es donde está situado el polo, hasta un punto arbitrario s del plano complejo. Es, por tanto, un vector que apunta en la dirección $s + \alpha$ del plano, puesto que la diferencia entre s y $(-\alpha, 0)$ es justamente $s + \alpha$:

$$s - (-\alpha, 0) = (\Re(s), \Im(s)) - (-\alpha, 0) = (\Re(s), \Im(s)) + (\alpha, 0) = s + \alpha \quad (125)$$

Como sabemos, la respuesta frecuencial $H(\Omega)$ es una señal compleja, por lo que tenemos que distinguir entre su módulo y su fase. En lo que respecta al módulo de $H(\Omega)$, tenemos que:

$$|H(\Omega)| = \left| \frac{1}{D(s)} \right|_{s=j\Omega} = \frac{1}{|j\Omega + \alpha|} \quad (126)$$

Es decir, el módulo de la respuesta frecuencial es la inversa del módulo del vector $D(s)$ cuando este es evaluado a lo largo del eje imaginario (*i.e.* de $s = j\Omega$). La Figura 17 muestra la forma que toma el vector $D(s)$ en el plano complejo para:

- $s = 0$ (*i.e.* $\Omega = 0$): puede observarse que, en este caso, el módulo del vector $D(0)$ es igual a α , con lo que el módulo de la respuesta frecuencial resulta ser $|H(0)| = 1/\alpha$.
- $s = \pm j\alpha$ (*i.e.* $\Omega = \pm\alpha$): en este caso, $|D(\pm j\alpha)| = \sqrt{2}\alpha$, con lo que $|H(\pm\alpha)| = 1/\sqrt{2}\alpha$.
- $s \rightarrow j\infty$ (*i.e.* $\Omega \rightarrow \infty$): y, en este caso, $|D(j\infty)| \rightarrow \infty$, con lo que $|H(\infty)| \rightarrow 0$.

Nótese que estos tres valores coinciden, de hecho, con los que se pueden observar en la Figura 5 del subapartado 1.5.2.

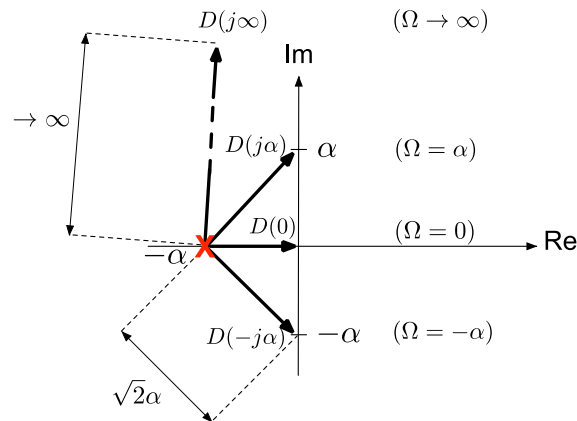


Figura 17. Representación del denominador de la función de transferencia, denotado como $D(s)$, como un vector en el plano complejo s .

Estos resultados corresponden al caso en que el polo del sistema se sitúa en $s = -\alpha$. Si el polo se acercara al origen (es decir, a medida que el valor de α disminuye y se acerca a 0), en la Figura 17 veríamos que el módulo del vector $D(j\Omega)$ se volvería mucho más sensible a variaciones de la frecuencia Ω : $|D(j\Omega)|$ sería muy pequeño para $\Omega = 0$ y rápidamente crecería a medida que Ω aumentara. Ello indica que **situar el polo cerca del origen provoca cambios abruptos en la respuesta frecuencial**. Si, por el contrario, el polo se alejara del origen (es decir, a medida que el valor de α aumenta y se aleja de 0), veríamos que el módulo del vector $D(j\Omega)$ sería poco sensible a variaciones de la frecuencia Ω : $|D(j\Omega)|$ sería grande ya para $\Omega = 0$ y solo crecería ligeramente a medida que Ω aumentara. Ello sugiere que **situar el polo lejos del origen provoca cambios suaves en la respuesta frecuencial**.

6.2. Interpretación frecuencial de la señal de salida de un sistema LIT

Tal como ya se ha visto en la propiedad de convolución de la Transformada de Fourier (ver subapartado 2.1.8), la salida de un sistema LIT viene dada por el producto entre la transformada de Fourier de la señal de entrada y la respuesta frecuencial del sistema. Es decir:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \quad (127)$$

Utilizando este mismo resultado, puede verse que, dadas la transformada de Fourier de la entrada, $X(\Omega)$, y de la salida, $Y(\Omega)$, la respuesta frecuencial del sistema, $H(\Omega)$, puede obtenerse según:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \quad (128)$$

para aquellas frecuencias en que el denominador no se anule. Por tanto, trabajar en el dominio frecuencial permite hacer fácilmente algo que puede no ser tan sencillo trabajando en el dominio temporal: obtener la respuesta frecuencial de un sistema excitando dicho sistema con una señal particular y observando la salida del mismo. A tal fin, suelen utilizarse señales de

entrada cuya transformada de Fourier, $X(\Omega)$, sea diferente de cero para toda frecuencia (como ocurre, por ejemplo, con la señal $x(t) = \delta(t)$). Obsérvese a continuación el siguiente ejemplo, que ilustra este hecho y que, además, permite introducir también una noción esencial en la teoría de señales y sistemas: el concepto de filtro.

Ejemplo 14

Tenemos la señal

$$x(t) = B_1 \text{sinc}(B_1 t) \quad (129)$$

en la entrada de un sistema LIT con respuesta impulsional

$$h(t) = B_2 \text{sinc}(B_2 t) \quad (130)$$

siendo $B_1 < B_2$. Se pide hallar la señal de salida del sistema.

Solución

Hallar la señal de salida de este sistema trabajando en el dominio temporal implicaría calcular la siguiente ecuación de convolución:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \\ &= B_1 B_2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(B_1 \lambda) \text{sinc}(B_2 (t - \lambda)) d\lambda \end{aligned} \quad (131)$$

Resolver la integral no es para nada trivial, teniendo en cuenta que $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$. Una alternativa interesante, pues, pasa por interpretar el problema en el dominio de la frecuencia y hallar la señal $y(t)$, del modo siguiente:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[x(t) * h(t)]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[x(t)]\mathcal{F}[h(t)]] = \mathcal{F}^{-1}[X(\Omega)H(\Omega)] \quad (132)$$

Para ello, necesitamos obtener las transformadas de Fourier $X(\Omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $H(\Omega) = \mathcal{F}[h(t)]$. A partir de los datos del enunciado y recordando la transformada de Fourier de la función sinc obtenida en (47), tenemos que:

$$X(\Omega) = B_1 \mathcal{F}[\text{sinc}(B_1 t)] = \Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_1}\right) \quad (133)$$

$$H(\Omega) = B_2 \mathcal{F}[\text{sinc}(B_2 t)] = \Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_2}\right) \quad (134)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_1}\right)\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_2}\right)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_1}\right)\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_2}\right)\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{\Omega}{2\pi B_2}\right)\right] = B_2 \text{sinc}(B_2 t) \end{aligned} \quad (135)$$

Como vemos, **la señal de salida $y(t)$ es igual a la respuesta impulsional del filtro.**

Este hecho, que de entrada no es nada intuitivo, puede comprobarse a partir de las representaciones gráficas de las señales implicadas, que se muestran en la Figura 18:

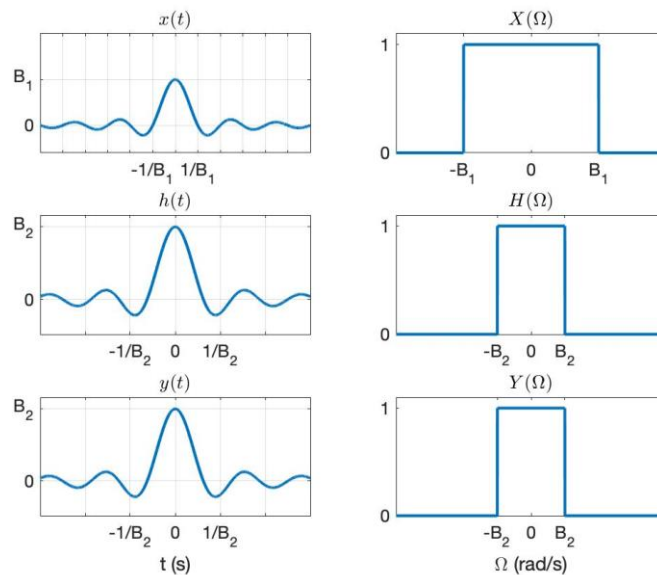


Figura 18. (Izquierda, de arriba a abajo) Señal de entrada, respuesta impulsional y señal de salida. (Derecha, de arriba a abajo) Transformada de Fourier de la señal de entrada, de la respuesta impulsional y de la señal de salida. Nótese que todas las señales que se muestran son reales y de simetría par, con lo cual sus transformadas de Fourier son también reales y de simetría par.

Como puede verse en la parte derecha de la figura, tanto la respuesta frecuencial de la señal de entrada como la del sistema son completamente planas. La respuesta frecuencial del sistema es, sin embargo, más estrecha, con lo que, al multiplicarse ambas, esta última acaba predominando. **Este fenómeno es la base del concepto de filtrado: los filtros son sistemas LIT estables tales que, idealmente, su respuesta frecuencial cancela ciertas frecuencias mientras que deja pasar intactas otras frecuencias.** Nótese que, desde un punto de vista conceptual, este comportamiento ya podía anticiparse a partir el Teorema de las autofunciones. Sea como sea, en el caso que nos ocupa en este ejemplo, vemos que $H(\Omega)$ cancela todas las frecuencias tales que $|\Omega| > B_2$, mientras que solo deja pasar las frecuencias tales que $|\Omega| \leq B_2$. Puesto que el sistema deja pasar únicamente las frecuencias bajas, menores que una cierta frecuencia B_2 , habitualmente denominada **frecuencia de corte**, este tipo de sistema se denomina «filtro paso-bajo». Más detalles sobre esta cuestión serán presentados a continuación, en el apartado 6.3 de este mismo módulo.

Vemos, pues, que, en el dominio frecuencial, como también pasaba en el dominio de Laplace, encontrar la respuesta de un sistema a partir de las señales de entrada y salida es mucho más fácil que en el dominio del tiempo, donde, para hacer esto, es necesario invertir la operación de convolución.

Este mismo principio que permite obtener la respuesta en frecuencia a partir de una señal de entrada y otra de salida puede aplicarse también a sistemas LIT cuya relación entrada-salida es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (136)$$

En este caso, es posible aplicar la Transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad y aplicar las propiedades de linealidad y derivación en el dominio del tiempo presentadas en los subapartados 2.1.1 y 2.1.4, respectivamente:

$$\mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \mathcal{F} \left[\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right] \quad (137)$$

Aplicando la propiedad de linealidad (137), obtenemos:

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right] \quad (138)$$

Y aplicando la propiedad de derivación en el dominio del tiempo en (138), obtenemos:

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\Omega)^k Y(\Omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\Omega)^k X(\Omega) \quad (139)$$

Sabiendo que la respuesta frecuencial viene dada por (128), la expresión de (139) da lugar al siguiente resultado final:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\Omega)^k} \quad (140)$$

Vemos que esta $H(\Omega)$ es el resultado del cociente de dos polinomios cuyos coeficientes no son más que los mismos coeficientes a_k y b_k definidos en (136), es decir, en la relación entrada-salida. Por lo tanto, en general, obtener la respuesta frecuencial de un sistema cuya relación entrada-salida sea una ecuación diferencial de la forma expresada en (136) es tan sencillo como calcular el cociente de polinomios en (140), tomando directamente los coeficientes constantes de la ecuación diferencial de entrada-salida.

Recordemos algo que ya hemos comentado, pero que es muy importante remarcar: no todo sistema definido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes tiene respuesta frecuencial. En general, para que exista la respuesta frecuencial $H(\Omega)$ se necesita que la respuesta impulsional $h(t)$ sea absolutamente integrable, continua y sin discontinuidades infinitas (como ya vimos en el subapartado 1.4), lo cual es condición suficiente, pero no necesaria, para que exista $H(\Omega)$. Y, como ya hemos visto en el apartado 6.1, la existencia de la respuesta frecuencial está ligada a la estabilidad del sistema, puesto que la condición de existencia se cumple si el sistema es estable. Es por ello que el estudio acerca de si un sistema es o no estable suele llevarse a cabo en el dominio de la Transformada de Laplace (comprobando, recordemos, si todos polos de la función de transferencia tienen parte real negativa o no), ya que esta transformada está siempre bien definida, independientemente de si el sistema es o no estable. Por el contrario, la Transformada de Fourier no está siempre definida, si bien la estabilidad del sistema garantiza que sí lo esté.

6.3. La operación de filtrado y su representación frecuencial

El ejemplo presentado en el apartado anterior ha permitido mostrar el concepto de **filtrado en frecuencia**, según el cual **la respuesta frecuencial de un sistema LIT presenta un comportamiento tal que atenúa o cancela un cierto margen de frecuencias, mientras que deja pasar más o menos intacto otro cierto margen de frecuencias (habitualmente denominadas «frecuencias de interés»)**. Este comportamiento permite, por ejemplo, diseñar sistemas que eliminan componentes frecuenciales indeseadas y que retengan únicamente las componentes frecuenciales deseadas. Este tipo de sistemas LIT, denominados habitualmente **filtros**, son ampliamente utilizados en la práctica en multitud de aplicaciones. A continuación se presenta un ejemplo práctico que ilustra bien la importancia de este concepto.

Considérese la técnica de multiplexación de frecuencia conocida como técnica de acceso múltiple a un mismo medio de comunicación. Es lo que se denomina *Frequency Division Multiple Access* (FDMA). Para compartir el medio, los diferentes usuarios transmiten a frecuencias diferentes de forma que sus respuestas frecuenciales están suficientemente separadas para que no exista solapamiento. De esta forma, todos los usuarios pueden transmitir a la vez sin interferirse.

En este ejemplo en cuestión se dispone de una señal $x(t)$ que está formada a su vez por dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que serían las señales transmitidas simultáneamente por sendos usuarios. La expresión temporal de la señal multiplexada en frecuencia es

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)e^{j\Omega_2 t} \quad (141)$$

y su representación frecuencial se muestra en la parte superior de la Figura 19. Las representaciones frecuenciales de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ aparecen representadas en azul y rojo, respectivamente.

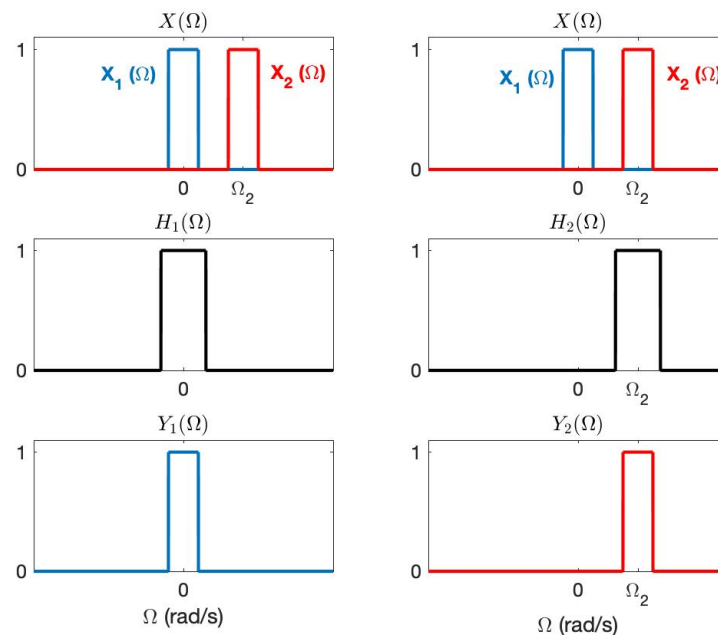


Figura 19. Ejemplo de filtrado paso-bajo (izquierda) y filtrado paso-banda (derecha) para seleccionar las señales individuales que se han transmitido de forma simultánea utilizando un esquema de multiplexación en frecuencia.

En recepción, cada usuario debe recuperar su señal individual. Para ello, se hace pasar la señal multiplexada $x(t)$ por dos sistemas LIT, tal y como se muestra en la Figura 20:

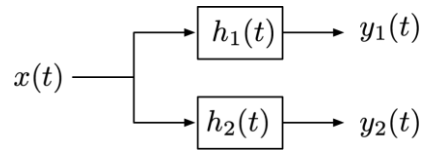


Figura 20. Diagrama de bloques para filtrar dos señales multiplexadas en frecuencia en la señal de entrada $x(t)$.

El primer sistema presenta una respuesta frecuencial como la que se muestra en la gráfica central izquierda de la Figura 19. De esta forma, al obtener la señal de salida según $Y_1(\Omega) = X(\Omega)H_1(\Omega)$, el sistema sólo deja pasar a su salida la respuesta frecuencial de la señal $x_1(t)$, es decir $X_1(\Omega)$, tal y como se muestra en la gráfica inferior izquierda de la Figura 19. De esta forma, el primer sistema consigue eliminar (es decir, filtrar) la señal $x_2(t)$ que está presente en la señal de entrada. Dado que este sistema sólo deja pasar las frecuencias bajas (*i.e.* las frecuencias ubicadas alrededor del origen de coordenadas, es decir, las frecuencias más o menos cercanas a la frecuencia $\Omega = 0 \text{ rad/seg}$) y elimina el resto de frecuencias, se lo denomina **filtro paso-bajo**.

El segundo sistema lleva a cabo el proceso contrario, en cuanto que deja pasar la señal $x_2(t)$ y eliminar la señal $x_1(t)$. Para ello, el segundo sistema presenta una respuesta frecuencial como la que se muestra en la gráfica central derecha de la Figura 19. De esta forma, al obtener la señal de salida según $Y_2(\Omega) = X(\Omega)H_2(\Omega)$, el sistema solo deja pasar a su salida la respuesta frecuencial de la señal $x_2(t)$, es decir $X_2(\Omega)$, tal y como se muestra en la gráfica inferior derecha de la Figura 19. De esta forma el segundo sistema consigue filtrar la señal $x_1(t)$ que está presente en la señal de entrada. Dado que este sistema sólo deja pasar una determinada banda de frecuencias, caracterizada por contener las frecuencias situadas alrededor de una determinada frecuencia central (en el caso de este ejemplo, Ω_2) que puede estar más o menos alejada del origen de coordenadas (es decir, de la frecuencia continua³), y elimina el resto, se lo denomina **filtro paso-banda**.

Este ejemplo que se acaba de describir muestra claramente el interés práctico de los sistemas LIT que dejan pasar ciertas frecuencias y eliminan el resto. Como ya hemos dicho, esta operación de selección de frecuencias de interés se conoce como «filtrado» y los sistemas que la llevan a cabo se denominan «filtros». Existen diferentes tipos de filtros en función del tipo de frecuencias que dejan pasar o, equivalentemente, en función del tipo de frecuencias que eliminan. Habitualmente, se distingue entre:

- **Filtro paso-bajo:** es un sistema LIT cuya respuesta frecuencial solo deja pasar las frecuencias bajas, ubicadas más o menos cerca del origen de coordenadas (*i.e.* de la frecuencia continua) y hasta una cierta frecuencia máxima Ω_c habitualmente denominada **frecuencia de corte** del filtro. Un ejemplo de filtro paso-bajo «ideal» es el que se muestra en la Figura 21 (arriba, izquierda).

³ La frecuencia $\Omega = 0 \text{ rad/seg}$ es habitualmente denominada «frecuencia continua», puesto que es la frecuencia en la que concentran toda su energía las señales continuas (*i.e.* las señales de amplitud constante a lo largo del tiempo), tal y como puede observarse en la Figura 8 de este mismo módulo.

- **Filtro paso-alto:** es un sistema LIT cuya respuesta frecuencial solo deja pasar las frecuencias altas, ubicadas más allá de una cierta frecuencia de corte Ω_p . Un ejemplo de filtro paso-alto «ideal» es el que se muestra en la Figura 21 (arriba, derecha).
- **Filtro paso-banda:** es un sistema LIT cuya respuesta frecuencial solo deja pasar una determinada banda de frecuencias comprendida entre las frecuencias de corte Ω_1 y Ω_2 ; o, si se prefiere, centrada alrededor de la **frecuencia central** Ω_0 , habitualmente definida como $\Omega_0 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Un ejemplo de filtro paso-banda «ideal» es el que se muestra en la Figura 21 (abajo, izquierda).
- **Filtro rechazo-banda:** es un sistema LIT cuya respuesta frecuencial elimina una determinada banda de frecuencias comprendida entre las frecuencias de corte Ω_1 y Ω_2 ; o, si se prefiere, centrada alrededor de la **frecuencia central** Ω_0 , habitualmente definida como $\Omega_0 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Un ejemplo de filtro rechazo-banda «ideal» es el que se muestra en la Figura 21 (abajo, derecha).

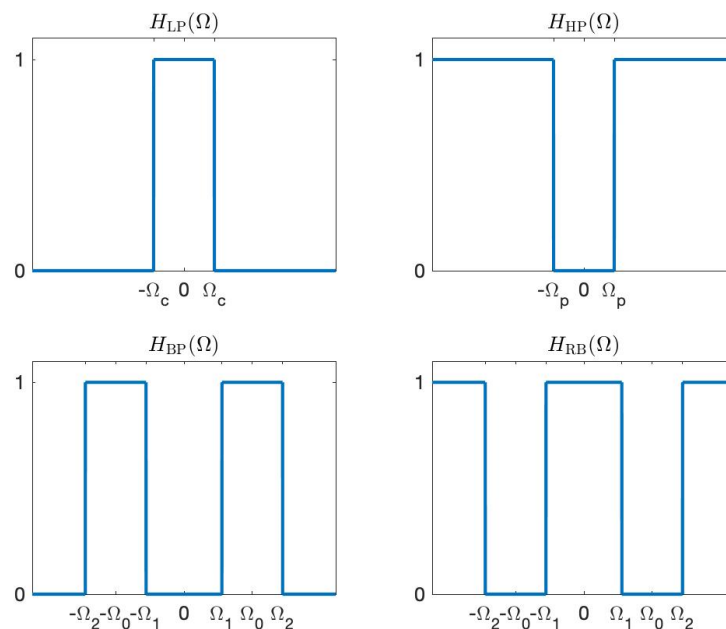


Figura 21. Respuestas frecuenciales ideales de diferentes tipos de filtros: (arriba, izquierda) filtro paso-bajo, o filtro LP, de *low-pass filter*; (arriba, derecha) filtro paso-alto, o filtro HP, de *high-pass filter*; (abajo, izquierda) filtro paso-banda, o filtro BP, de *band-pass filter*; (abajo, derecha) filtro rechazo-banda, o filtro RB, de *reject-band filter*.

Nótese que todos los filtros aquí ilustrados son filtros «ideales». Se los denomina así debido a que las transiciones entre sus **bandas de paso** (*i.e.* las bandas de frecuencias que el filtro deja pasar) y sus **bandas rechazadas** (*i.e.* las bandas de frecuencias que el filtro elimina) son discontinuidades perfectamente verticales. En el caso del filtro paso-bajo de la Figura 21, por ejemplo, su banda de paso está constituida por el conjunto de frecuencias $\Omega \in [-\Omega_c, \Omega_c]$ y sus bandas rechazadas son $\Omega \in (-\infty, -\Omega_c)$ y $\Omega \in (\Omega_c, +\infty)$. Las bandas de paso y bandas rechazadas de los otros tipos de filtro se definen análogamente, siguiendo este mismo criterio.

En la práctica, sin embargo, los filtros nunca son ideales. Los filtros ideales aquí ilustrados poseen unas respuestas frecuenciales en forma de uno o varios pulsos cuadrados perfectos (dependiendo de cuántas bandas de paso presente el filtro), con lo que sus respectivas

respuestas impulsionales están formadas por una o varias señales sinc. Por tanto, sus respuestas impulsionales son señales infinitas a ambos lados, lo cual implica, como ya sabemos, que no se trata de filtros causales. Los filtros reales son sistemas causales y estables, lo cual provoca que sus respuestas frecuenciales no sean tan perfectas e «ideales»: en la práctica, por tanto, los filtros reales también presentan **bandas de transición** (*i.e.* las bandas de frecuencias que separan a las bandas de paso de las bandas rechazadas).

Asimismo, nótese que todas las respuestas frecuenciales mostradas en la Figura 21 presentan simetría par y son todas reales, razón por la cual se muestra directamente el valor de la respuesta frecuencial $H(\Omega)$ y no se distingue entre su módulo y su fase. Ello implica que la respuesta impulsional de estos filtros es también real y par (recuérdese el Ejemplo 8), lo cual, de nuevo, también significa que las respuestas impulsionales no son causales. En la práctica, se necesita que las respuestas sean causales para que los filtros sean implementables, lo cual hace que su respuesta frecuencial sea en realidad compleja (no real) y, por tanto, sea necesario representarla en términos de módulo y fase. En cualquier caso, su módulo coincidiría igualmente con la forma que presentan las respuestas frecuenciales mostradas en la Figura 21 y esta forma es precisamente lo importante y lo que distingue a un tipo de filtro de otros.

7. Introducción a la teoría del muestreo

La mayoría de los estímulos que encontramos en la naturaleza varían de forma continua en función del tiempo y, por tanto, pueden representarse mediante señales analógicas. Este es el caso del sonido, la luz o la temperatura. Sin embargo, los dispositivos actuales para el procesamiento de señal y el cálculo computacional son digitales, lo cual significa que trabajan con secuencias de números discretos, típicamente binarios. Es por ello que existen técnicas de conversión para transformar señales analógicas en señales digitales (y que, de este modo, puedan ser procesadas por sistemas digitales), y viceversa. Estas técnicas de conversión son conocidas como «conversión analógico-digital» (o «conversión A/D») y su opuesta, la «conversión digital-analógico» (o «conversión D/A»).

En primer lugar, la conversión A/D consiste en un proceso que, en realidad, implica llevar a cabo tres operaciones distintas asociadas a tres rasgos característicos propios de las señales digitales. La primera de esas operaciones consiste en convertir la señal analógica de entrada, que es una señal en tiempo continuo, en una señal en tiempo discreto. Esta operación de discretización del dominio del tiempo se denomina **muestreo** y es un proceso que da lugar a una secuencia de valores numéricos (o muestras) que se corresponden idealmente con las amplitudes de la señal analógica de entrada en los «instantes de muestreo» y que son valores reales (puesto que los valores de amplitud de la señal analógica de entrada son valores reales).

La segunda operación llevada a cabo en la conversión A/D es la *cuantificación*, que consiste en una discretización de las amplitudes de las muestras resultantes del muestreo, mapeándolas contra un conjunto discreto, finito y preestablecido de valores numéricos (*i.e.* niveles de cuantificación). Los valores de las muestras resultantes del muestreo son, por lo tanto, modificados. Y, finalmente, el tercer paso en la conversión A/D es la *codificación* de los valores de amplitud cuantificados siguiendo un esquema binario que mapea cada valor de amplitud con un conjunto de b bits. Es en este punto cuando ya podemos decir con propiedad que tenemos una señal digital, en el sentido de que está discretizada tanto en tiempo como en amplitud y de que sus valores están codificados siguiendo un esquema binario.

Y, en segundo lugar, el proceso inverso es llevado a cabo mediante la conversión D/A. Sin embargo, la conversión D/A se realiza únicamente en dos pasos: una descodificación de los valores numéricos binarios y un proceso de filtrado, consistente en la aplicación de un *filtro reconstructor* (o también denominado *filtro interpolador*). Es importante notar que, si bien la codificación llevada a cabo en la conversión A/D es un proceso obviamente reversible, está claro que la cuantificación nunca lo es. Sin embargo, y a diferencia de lo que podría parecer de entrada, **bajo ciertas condiciones, el muestreo sí es un proceso reversible**.

En esta sección, utilizaremos la teoría sobre la Transformada de Fourier desarrollada en el presente módulo para llevar a cabo una introducción al proceso de muestreo y presentar el resultado fundamental en lo referente a las condiciones bajo las que el muestreo es un proceso reversible: el **Teorema del muestreo**, también conocido como **Teorema de Nyquist**.

7.1. Muestreo ideal

Descrito en términos generales, el proceso de muestreo consiste en tomar muestras de una señal analógica $x(t)$ cada cierto tiempo, dando lugar a una secuencia de valores de amplitud en tiempo discreto. Habitualmente, las muestras se toman de forma uniforme cada T_m segundos, de acuerdo a una cierta **frecuencia de muestreo** $F_m = 1/T_m$ (expresada en *Hz* o *muestras/seg*) o, equivalentemente, $\Omega_m = 2\pi/T_m$ (expresada en *rad/seg*). Ello da lugar a una señal en tiempo discreto que podemos denotar como $x[n]$:

$$x[n] \doteq x(t)|_{t=nT_m} = x(nT_m) \quad (142)$$

siendo $n \in \mathbb{Z}$ la variable de tiempo discreto.

El muestreo ideal de una señal en tiempo continuo $x(t)$ puede entenderse como el producto entre la señal $x(t)$ y un tren de deltas equiespaciadas T_m segundos:

$$\begin{aligned} x_m(t) &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m) \delta(t - nT_m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_m) \end{aligned} \quad (143)$$

Tanto la señal $x(t)$ como el tren de deltas son señales en tiempo continuo, con lo cual **el resultado del muestreo ideal es también una señal en tiempo continuo que denominamos $x_m(t)$** , tal que los coeficientes de amplitud que multiplican a cada una de las deltas presentes en $x_m(t)$ son justamente los valores de amplitud de $x(t)$ en los instantes de muestreo.

Remarquémoslo: con el muestreo ideal no se abandona el dominio analógico, puesto que el resultado del muestreo sigue siendo una señal de tiempo continuo. Lo que se consigue es generar una señal analógica, $x_m(t)$, en la que se han aislado muestras de $x(t)$.

7.2. Interpretación frecuencial del muestreo ideal

Desde el punto de vista del dominio frecuencial, hay un aspecto fundamental a la hora de analizar las consecuencias que conlleva muestrear una señal en tiempo continuo. Al interpretar el proceso de muestreo como producto entre la señal de interés en tiempo continuo con un tren de deltas también en tiempo continuo, se observa muy claramente que **la transformada de Fourier de la señal muestreada es una señal periódica en el dominio de la frecuencia**.

A continuación, se presenta y justifica detalladamente dicho efecto, y se extraen de él sus consecuencias más relevantes, entre las que destaca el fenómeno del *aliasing*.

Si aplicamos la Transformada de Fourier directamente sobre la expresión en (143), obtenemos la siguiente representación frecuencial:

$$\begin{aligned} X_m(\Omega) &= \mathcal{F}[x_m(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \frac{2\pi}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right) \\ &= \frac{1}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\Omega - n \frac{2\pi}{T_m}\right) \end{aligned} \quad (144)$$

O sea: en $X_m(\Omega)$, que es la representación frecuencial de la señal muestreada $x_m(t)$, aparecen **réplicas periódicas de $X(\Omega)$** , que es la transformada de Fourier de la señal original $x(t)$, centradas en frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de muestreo $\Omega_m = 2\pi/T_m$.

Esta situación se muestra en la Figura 22:

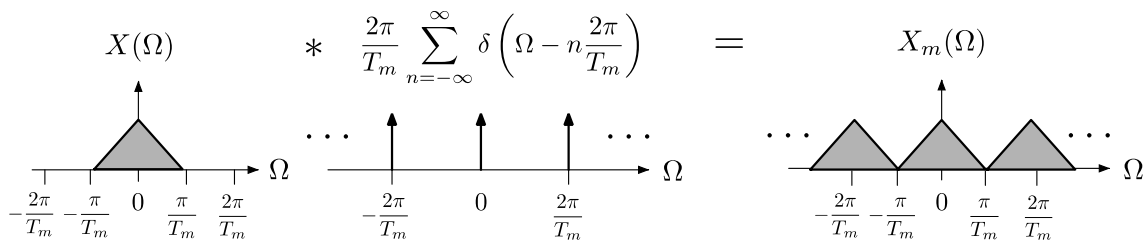


Figura 22. Interpretación frecuencial de la operación de muestreo ideal como producto en el dominio del tiempo entre la señal de interés y un tren de deltas equiespaciadas el tiempo de muestreo. En el dominio de la frecuencia, ello da lugar a la convolución entre la transformada de Fourier de la señal de interés y la transformada de Fourier del tren de deltas, que, aplicando la fórmula de Poisson, se corresponde con otro tren de deltas en frecuencia. El resultado da lugar a una señal muestreada cuya transformada de Fourier es periódica con periodo igual a la frecuencia de muestreo $\Omega_m = 2\pi/T_m = 2\pi F_m$.

En esta figura puede observarse cómo, a partir de una señal en tiempo continuo $x(t)$ con transformada de Fourier $X(\Omega)$, **el resultado del muestreo ideal da lugar a la convolución de $X(\Omega)$ con un tren de deltas en frecuencia equiespaciadas una distancia $\Omega_m = 2\pi/T_m$** . Ello hace que **la transformada de Fourier de la señal muestreada resultante, $X_m(\Omega)$, esté compuesta por réplicas de $X(\Omega)$ equiespaciadas a frecuencias múltiplos de Ω_m** . Este efecto es dual al ya conocido para la transformada de Fourier de señales periódicas, donde el resultado de una periodicidad en el dominio del tiempo da lugar a una transformada de Fourier que es discreta en el dominio frecuencial. Por ejemplo: si tomamos una señal temporal periódica conocida como la señal senoidal, vemos que su transformada de Fourier es discreta y está formada por dos deltas (este resultado se puede recuperar de la Tabla 1 de este mismo módulo). En el caso que nos ocupa (*i.e.* el muestreo ideal), estamos en la situación contraria. **Tenemos una señal discreta en el dominio del tiempo que, por el hecho de ser discreta, da lugar a una transformada de Fourier periódica en el dominio de la frecuencia.**

De esta forma podemos afirmar que la **periodicidad en un dominio (sea temporal o frecuencial) lleva asociada una discretización (es decir, un muestreo) en el dominio transformado correspondiente.**

A raíz de la periodicidad que aparece en el dominio de la frecuencia cuando el dominio del tiempo es muestreado, surge una observación que es importante tener presente. Nótese que, en la Figura 22, la señal de interés (*i.e.* $x(t)$) es una señal paso-bajo cuyo ancho de banda es:

$$W_x = \frac{\pi}{T_m} \quad (145)$$

Es decir: la transformada de Fourier de $x(t)$ (*i.e.* $X(\Omega)$) concentra toda su energía en frecuencias inferiores a $\Omega = \pi/T_m$. Nótese también que este ancho de banda se corresponde exactamente con la mitad de la frecuencia de muestreo:

$$\frac{\Omega_m}{2} = \frac{2\pi}{2T_m} = \frac{\pi}{T_m} \quad (146)$$

De esta forma, al convolucionar $X(\Omega)$ con el tren de deltas en frecuencia, la transformada de Fourier resultante presenta réplicas de $X(\Omega)$ a frecuencias múltiples de Ω_m , cada una de las cuales coincide exactamente con la transformada de Fourier $X(\Omega)$ original.

Sin embargo, si el ancho de banda de $X(\Omega)$ hubiera sido mayor que $\Omega_m/2$, las réplicas de $X(\Omega)$ se habrían solapado entre ellas y el resultado sería una señal muestreada cuya transformada de Fourier no presentaría réplicas exactas de la transformada de Fourier original, tal y como se ilustra en la Figura 23.

En este caso, al observar la transformada de Fourier de la señal muestreada no es posible identificar las réplicas individuales de $X(\Omega)$. Este efecto se conoce como **aliasing** (o «solapamiento») y consiste en que la **señal muestreada $x_m(t)$ distorsione y no reproduzca de forma fiel la señal original $x(t)$, como resultado del solapamiento de las réplicas de $X(\Omega)$ que se suman entre sí en $X_m(\Omega)$.**

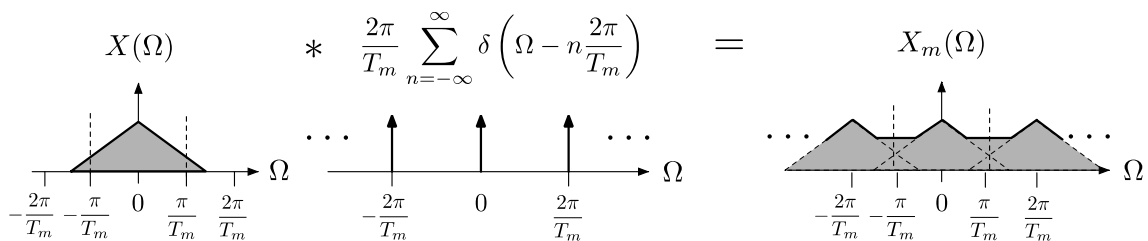


Figura 23. Interpretación frecuencial de la operación de muestreo ideal, en el caso que la señal de interés presente un ancho de banda superior a $\Omega_m/2 = \pi/T_m$. En ese caso, la transformada de Fourier de la señal muestreada queda afectada por el efecto de **aliasing**.

Por lo tanto, **para evitar el efecto de aliasing es necesario que la señal analógica de entrada no presente componentes frecuenciales por encima de $\Omega_m/2$.** Ello se puede conseguir de dos formas:

- (1) **Aplicando un filtro paso-bajo de frecuencia de corte $\Omega_c = \Omega_m/2$ a la entrada del conversor A/D** (i.e. inmediatamente antes del proceso de muestreo) para garantizar que el ancho de banda de la señal a la salida del filtro no exceda nunca de $\Omega_m/2$. Debido a la finalidad que tiene, este filtro es conocido como **filtro anti-aliasing**.
- (2) **Asegurando que la frecuencia de muestreo sea siempre superior al doble del ancho de banda de la señal analógica que va a ser muestreada**, lo cual viene determinado por el Teorema del muestreo, que se presenta con más detalle en el apartado 7.3.

En la práctica se suelen implementar ambas opciones de forma simultánea.

Ejemplo 15

Considérese la señal $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$, con $\Omega_0 = 2\pi \cdot 8000 \text{ rad/seg}$, que es muestreada idealmente utilizando una frecuencia de muestreo de $\Omega_m = 2\pi \cdot 20000 \text{ rad/seg}$. Se pide determinar la representación frecuencial de la señal muestreada y discutir si presenta o no *aliasing*.

Solución

En primer lugar, determinamos la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo $x(t)$, que, en este caso, resulta ser la siguiente (este resultado se puede recuperar de la Tabla 1 de este mismo módulo):

$$X(\Omega) = \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0) \quad (147)$$

con $\Omega_0 = 2\pi F_0 = 2\pi 8000 \text{ rad/seg}$. La representación gráfica de $X(\Omega)$ se muestra en la parte superior de la Figura 24 (gráfica superior), donde se pueden apreciar las dos deltas correspondientes a la transformada de Fourier de una señal cosenoidal.

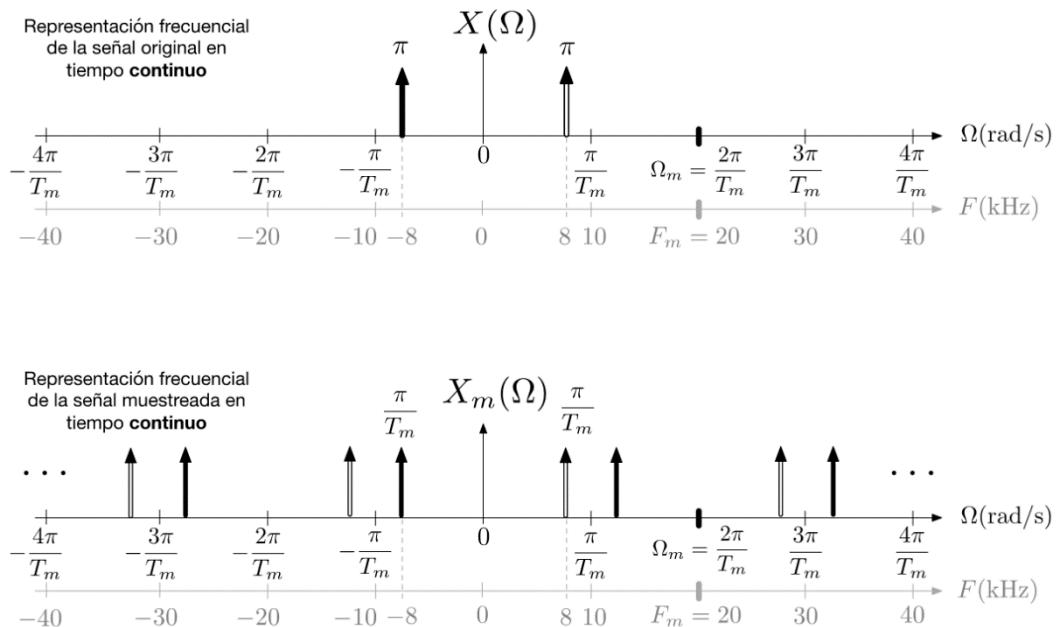


Figura 24. Representación frecuencial de la señal muestreada del Ejemplo 15.

Nótese que una de las deltas se ha representado con cuerpo blanco para poder identificarla fácilmente cuando posteriormente aparezcan las réplicas periódicas en el dominio de la

frecuencia debido al proceso de muestreo. Por claridad, la figura muestra el eje de frecuencias tanto en términos de Ω como equivalentemente en términos de F , siendo esta última una notación habitual en aplicaciones prácticas.

Y, en segundo lugar, obtenemos $X_m(\Omega)$, la representación frecuencial de la señal muestreada en tiempo continuo, $x_m(t)$. Para ello, hacemos uso de (144), donde se indica que $X_m(\Omega)$ está formada por la superposición de réplicas de la transformada de Fourier de la señal original, $X(\Omega)$, centradas a frecuencias múltiples de la frecuencia de muestreo. Esto es, réplicas cada $\Omega = \pm n\Omega_m = \pm 2\pi n/T_m$ para $n \in \{1, \dots, \infty\}$:

$$X_m(\Omega) = \frac{\pi}{T_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - \frac{2\pi}{T_m}n\right) + \delta\left(\Omega + \Omega_0 - \frac{2\pi}{T_m}n\right) \quad (148)$$

El resultado se muestra en la Figura 24 (gráfica inferior) donde puede observarse claramente cómo la representación frecuencial de $X_m(\Omega)$ es periódica con periodo igual a la frecuencia de muestreo, Ω_m .

Además, también se observa claramente que el proceso de muestreo no ha generado *aliasing* en la señal muestreada, ya que las réplicas de $X(\Omega)$ en $X_m(\Omega)$ no se solapan entre sí: de haberlo hecho, las deltas de una réplica se habrían cruzado con las de sus réplicas adyacentes. De hecho esta ausencia de *aliasing* ya se podía prever de entrada, puesto que, efectivamente, el ancho de banda de la señal de interés es inferior a la mitad de la frecuencia de muestreo:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \Omega_0 = 2\pi \cdot 8000 \text{ rad/seg} \\ \Omega_m &= 2\pi \cdot 20000 \text{ rad/seg} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Omega_0 < \frac{\Omega_m}{2} = 2\pi \cdot 10000 \text{ rad/seg} \quad (149)$$

7.3. Teorema del muestreo

El **Teorema del muestreo** (o **Teorema de Nyquist**) se basa en que, para evitar que haya *aliasing* en un proceso de muestreo (*i.e.* el solapamiento de réplicas en el dominio frecuencial), la frecuencia de muestreo ha de ser tal que:

$$\boxed{\Omega_m \geq 2W_x} \quad (150)$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{F_m \geq 2B_x} \quad (151)$$

allí donde W_x (en *rad/seg*), o equivalentemente B_x (en *Hz*), es el ancho de banda de la señal analógica que va a ser muestreada ($W_x = 2\pi B_x$). **La condición expresada en (150)-(151) es conocida como el criterio de Nyquist.**

La justificación de este teorema se comprende de forma intuitiva a partir del efecto de *aliasing* que aparece en la Figura 23, cuando sucede que dicho criterio no se cumple. **La frecuencia de muestreo $\Omega_m = 2W_x$, o equivalentemente $F_m = 2B_x$, es también**

conocida como la frecuencia de Nyquist, y es la mínima frecuencia de muestreo que garantiza la ausencia de *aliasing*.

El teorema de muestreo entendido como tal no hace más que formalizar esta observación intuitiva que acaba de describirse. Es decir, el teorema establece que **toda señal analógica de banda limitada (es decir, de ancho de banda finito), puede ser muestreada de modo tal que el proceso de muestreo sea reversible (es decir, que la señal analógica original puede recuperarse íntegramente a partir de la señal muestreada)**. Para ello, es necesario que la frecuencia de muestreo utilizada cumpla con el criterio de Nyquist expresado en (150)-(151).

El resultado expresado en el Teorema del muestreo es de gran importancia a la hora de plantear el proceso opuesto a la conversión A/D, que no es otro que la conversión digital-analógico, o conversión D/A. La idea consiste en recuperar una señal analógica $x_r(t)$ a partir de la señal resultante del muestreo, $x_m(t)$, mediante la aplicación de un **filtro reconstructor (o filtro interpolador)**:

$$x_r(t) = x_m(t) * h_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_r(\Omega) = X_m(\Omega)H_i(\Omega) \quad (152)$$

siendo $h_i(t)$ el filtro interpolador, cuyas respuestas impulsional y frecuencial son, idealmente, las siguientes (este resultado se puede recuperar de la Tabla 1 de este mismo módulo):

$$h_i(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_m}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H_i(\Omega) = T_m \Pi\left(\frac{\Omega}{\Omega_m}\right) \quad (153)$$

allí donde $\Omega_m = 2\pi/T_m$.

Nótese, pues, que **el filtro interpolador ideal es un filtro paso-bajo ideal, de frecuencia de corte $\Omega_c = \Omega_m/2$ y amplitud T_m en la banda de paso.**

Teniendo en cuenta que $x_m(t)$ es el resultado del muestreo de una señal analógica original $x(t)$, según (143) y (144), se observa que **la misión del filtro interpolador es eliminar las réplicas de $X(\Omega)$ que existen en $X_m(\Omega)$ más allá de su frecuencia de corte, de modo que el contenido frecuencial de la señal recuperada (i.e. la señal de salida del filtro) esté contenido en $(-\Omega_m/2, \Omega_m/2)$.**

Así pues, se observa que, **si el muestreo ha sido realizado de acuerdo con el criterio de Nyquist, no ha habido *aliasing* y la señal analógica original puede ser recuperada íntegramente a partir de la señal resultante del muestreo mediante la aplicación de este filtro interpolador.**

O, puesto en términos más simples: **si no ha habido *aliasing*, entonces $x_r(t) = x(t)$.**

Conclusión: **el cumplimiento del criterio de Nyquist garantiza que el proceso de muestreo no distorsiona la información contenida en la señal analógica original.**

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra todos estos conceptos.

Ejemplo 16

Considérese la misma señal $x(t)$ del Ejemplo 15, pero ahora el muestreo ideal se implementa a razón de una frecuencia de muestreo de $\Omega_m = 2\pi \cdot 10000 \text{ rad/seg}$. Se pide obtener la representación frecuencial de la señal reconstruida a partir de la señal muestreada mediante un filtro interpolador ideal.

Solución

En este caso tenemos una frecuencia de muestreo $\Omega_m = 2\pi \cdot 10000 \text{ rad/seg}$ que no cumple el criterio de Nyquist, ya que el ancho de banda de $x(t)$ es de $\Omega_0 = 2\pi \cdot 8000 \text{ rad/seg}$. Como resultado, la señal muestreada se verá afectada por el efecto de *aliasing* y no será posible recuperar la señal original $x(t)$ a partir de su versión muestreada. Para comprobarlo, vamos a analizar la representación frecuencial de esta señal muestreada.

El primer paso consiste en obtener la representación frecuencial de la señal original $x(t)$. Al ser la misma señal que en el Ejemplo 15, su representación frecuencial $X(\Omega)$ es exactamente la misma que la que aparece en la parte superior de la Figura 24 y se reproduce a continuación en la parte superior de la Figura 25:

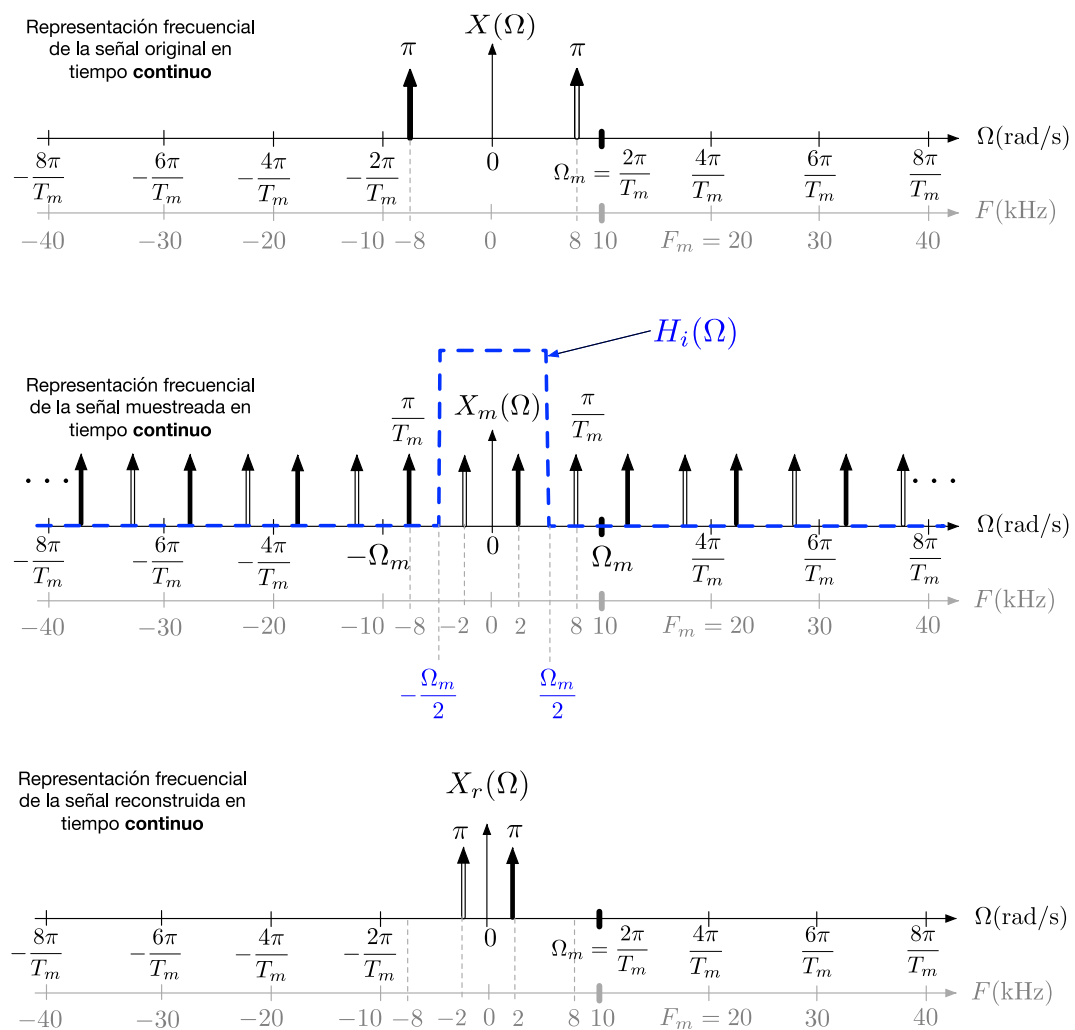


Figura 25. Representaciones frecuenciales de las señales involucradas en el Ejemplo 16.

El segundo paso consiste en implementar la operación de muestreo ideal para obtener la señal muestreada, $x_m(t)$, cuya respuesta frecuencial, $X_m(\Omega)$, se muestra en la parte central de la Figura 25. Tal y como ocurría en el Ejemplo 15, $X_m(\Omega)$ presenta un comportamiento periódico en frecuencia, con réplicas de la transformada de Fourier de la señal original, $X(\Omega)$, a frecuencias múltiples de la frecuencia de muestreo.

La diferencia con el Ejemplo 15 es que, al incumplirse el criterio Nyquist, cada una de las réplicas de $X(\Omega)$ «invade» y es a su vez «invadida» por sus réplicas adyacentes, puesto que el ancho de banda de todas ellas es superior a $\Omega_m \text{ rad/seg}$ y la separación entre réplicas adyacentes es justamente de $\Omega_m \text{ rad/seg}$. Si tomamos, por ejemplo, la réplica de $X(\Omega)$ centrada en $\Omega = 0$, vemos que debería ser la única réplica de $X(\Omega)$ presente en la región frecuencial $(-\Omega_m/2, \Omega_m/2)$, pero que, sin embargo, ello no es así, puesto que la réplica de $X(\Omega)$ centrada en $\Omega = 0$ va más allá de esa región y sus réplicas adyacentes (esto es, las réplicas de $X(\Omega)$ centradas en $\Omega = -\Omega_m$ y $\Omega = \Omega_m$) invaden esa región. **Como puede observarse en la parte central de la Figura 25, en dicha región de $X_m(\Omega)$ aparecen dos deltas, pero estas no son las deltas de la señal original (i.e. de la réplica de $X(\Omega)$ centrada en $\Omega = 0$), sino que son alias, es decir, que se corresponden con deltas originales pertenecientes a las réplicas de $X(\Omega)$ centradas en $\Omega = -\Omega_m$ y $\Omega = \Omega_m$, respectivamente.** Ello puede observarse notando que la delta inicialmente presente en las frecuencias positivas de $X(\Omega)$, y representada con cuerpo blanco, aparece ahora en las frecuencias negativas de $X_m(\Omega)$.

Por otro lado, es interesante mencionar que, si se observan las frecuencias en las que están ubicadas las deltas que han quedado en la región $(-\Omega_m/2, \Omega_m/2)$ de $X_m(\Omega)$, se comprueba que su valor resulta ser de 2 kHz , en comparación con los 8 kHz originales de $X(\Omega)$. Esto indica que **no es posible recuperar la cosinusoide inicial de 8 kHz , puesto que, al haberse incumplido la condición de muestreo de Nyquist, señal muestreada resultante solo permite recuperar una cosinusoide de 2 kHz .** De hecho, es exactamente la misma señal muestreada que se obtendría del muestreo de una señal cosinusoidal original de 2 kHz muestreada a $\Omega_m = 2\pi \cdot 10000 \text{ rad/seg}$ (nótese que, en tal muestreo, sí se estaría cumpliendo el criterio de Nyquist, con lo que, efectivamente, sí podría recuperarse la cosinusoide original de 2 kHz).

Esta hipótesis se confirma al aplicar el filtro interpolador para recuperar la señal analógica original. El filtro aparece indicado en azul en la gráfica central de la Figura 25, donde puede verse cómo selecciona únicamente las dos deltas que han quedado dentro de la región frecuencial $(-\Omega_m/2, \Omega_m/2)$. La transformada de Fourier de la señal reconstruida se ha denotado como $X_r(\Omega)$ y se muestra en la parte inferior de la Figura 25. Como puede observarse, $X_r(\Omega)$ da lugar a una señal analógica cosinusoidal 2 kHz , en lugar de la señal cosinusoidal original de 8 kHz .

Antes de finalizar, conviene mencionar que, en la práctica, es habitual considerar una frecuencia de muestreo ligeramente superior a la que estrictamente establece el Teorema de Nyquist. Hay varias razones para ello. Una de ellas surge al plantear **el muestreo de tonos puros, es decir, señales de tipo co/senoidal**. En tal caso, tenemos, por ejemplo, una señal analógica original como $x(t) = \sin(\Omega_0 t)$. Si tomamos estrictamente el criterio de Nyquist expresado en (150), tenemos que la frecuencia de muestreo sería $\Omega_m = 2\Omega_0$. Como consecuencia de ello, aplicando (142) vemos que las muestras de $x(t)$ capturadas en la señal muestreada $x_m(t)$ son las siguientes:

$$x(nT_m) = \sin\left(\Omega_0 \frac{2\pi}{\Omega_m} n\right) = \sin\left(\Omega_0 \frac{2\pi}{2\Omega_0} n\right) = \sin(\pi n) = 0 \quad (154)$$

Nótese que, a pesar de cumplir estrictamente con el Teorema del muestreo, las muestras resultantes del muestreo son todas iguales a cero, con lo que la señal resultante del muestreo es, en realidad, una ausencia de señal. Esto no habría ocurrido si la senoide se hubiera desfasado ligeramente antes de ser muestreada, pasando a ser, por ejemplo, $x(t) = \sin(\Omega_0 t + \theta)$, con $\theta \neq \{0, \pi\}$. En ese caso, el resultado del muestreo sí habría dado lugar a una senoide en tiempo discreto, lo cual indica que existe una ambigüedad a la hora de recuperar la senoide inicial a pesar de haber muestreado exactamente a la frecuencia de Nyquist. Este ejemplo es en realidad un caso límite de la condición del Teorema de Nyquist que requiere que la frecuencia de muestreo sea estrictamente superior a dos veces el ancho de banda de la señal. Esto es: $\Omega_m > 2\Omega_0$.

Resumen

En este módulo, hemos estudiado la Transformada de Fourier como herramienta útil para el análisis de señales y de sistemas LIT analógicos en el dominio de la frecuencia, así como caso particular de la Transformada de Laplace estudiada en el módulo anterior.

En primer lugar, se han presentado las ecuaciones de análisis y de síntesis de la Transformada de Fourier, haciendo énfasis no solo en su formulación, sino también en su representación gráfica y en su interpretación. Se ha establecido la conexión entre tiempo y frecuencia y se ha mostrado cómo efectos que adoptan cierta apariencia en el dominio el tiempo (*e.g.* señales temporales de duración finita) tienen un correlato frecuencial opuesto, es decir, adoptan una apariencia opuesta en el dominio de la frecuencia (*e.g.* respuestas frecuenciales de duración infinita), y viceversa. Como parte del proceso para comprender la Transformada de Fourier, se han presentado también una serie de condiciones de convergencia que es necesario cumplir para garantizar la existencia de la Transformada de Fourier. A su vez, se han presentado ejemplos concretos para empezar a familiarizarse con el cálculo de la Transformada de Fourier y para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Una vez introducido el concepto de Transformada de Fourier, se ha procedido a profundizar en sus propiedades y a presentar casos prácticos de transformadas de Fourier de señales típicas. El objetivo ha sido el de adquirir competencia práctica para poder obtener la transformada de Fourier de una señal aplicando propiedades y resultados ya conocidos, en lugar de implementar sin más el cálculo paso a paso de la ecuación de análisis/síntesis de la Transformada de Fourier. En este sentido, se ha presentado un listado de resultados y de propiedades que es conveniente tener presente para abordar con agilidad y soltura el análisis en frecuencia. Estas propiedades se han aplicado posteriormente para obtener la Transformada de Fourier de señales periódicas y se ha establecido la conexión con la Serie de Fourier.

Seguidamente, se ha hecho un repaso de la conexión entre la respuesta frecuencial y la función de transferencia de sistemas LIT analógicos, comprobando cómo la propiedad de las autofunciones de los sistemas LIT vista en términos de la Transformada de Laplace también puede ser vista en términos de la Transformada de Fourier, simplemente evaluando la variable compleja s en el eje imaginario de frecuencias. Esta observación permite aprovechar la propiedad de la Transformada de Laplace según la cual la salida de un sistema viene dada por el producto de las transformadas de Laplace de la señal de entrada y de la respuesta impulsional del sistema. El mismo resultado aplica en el caso de la Transformada de Fourier, haciendo que la salida de un sistema LIT se pueda calcular a partir del producto de las transformadas de Fourier de la señal de entrada y de la respuesta impulsional del sistema. Esta última es denominada la respuesta frecuencial del sistema y, en muchos casos, permite obtener la salida de un sistema LIT de forma más sencilla que la resultante de calcular la operación convolución en el dominio del tiempo. Asimismo, se ha introducido el concepto de

filtro, que no es más que un sistema LIT cuya respuesta frecuencial selecciona unas ciertas frecuencias de la señal de entrada y elimina otras, teniendo infinitud de aplicaciones prácticas.

Finalmente, el módulo concluye con una introducción a las técnicas de muestreo de señales analógicas, presentando el muestreo ideal con tren de deltas, la interpretación frecuencial del proceso de muestreo, el fenómeno del *aliasing* y, como consecuencia de todo ello, el Teorema del muestreo (o Teorema de Nyquist), que es un resultado fundamental en la teoría del muestreo y que permite definir las condiciones bajo las que un proceso de muestreo es reversible (es decir, las condiciones bajo las que el muestreo de una señal preserva toda la información contenida en dicha señal).

Ejercicios de autoevaluación

1. Dada una señal $x(t)$ en el dominio temporal, ¿qué relación existe entre su transformada de Laplace y su transformada de Fourier, denotadas aquí según $X_L(s)$ y $X_F(\Omega)$, respectivamente?
 - (a) $X_F(\Omega) = X_L(s = \Omega)$.
 - (b) $X_F(\Omega) = X_L(s = j\Omega)$.
 - (c) $X_F(\Omega) = X_L(s = -j\Omega)$.
 - (d) $X_F(\Omega) = jX_L(s = \Omega)$.
2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
 - (a) Para que la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier exista es necesario que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.
 - (b) La señal delta de Dirac permite obtener la transformada de Fourier de señales que, *a priori*, no cumplen con los requisitos de convergencia.
 - (c) La señal delta de Dirac es tal que $\delta(t) = 1$ para $t = 0$ y $\delta(t) = 0$ en el resto.
 - (d) Si una señal cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$, entonces también cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, con lo que implícitamente está cumpliendo la primera condición de Dirichlet.
3. Se dispone de una señal $x(t)$ que es imaginaria pura. ¿Qué propiedades de simetría presenta su transformada de Fourier $X(\Omega)$?
 - (a) $X(\Omega) = X^*(\Omega)$.
 - (b) $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$.
 - (c) $X(\Omega) = -X^*(\Omega)$.
 - (d) $X(\Omega) = -X^*(-\Omega)$.
4. Se dispone de una señal $x(t)$ que es real. ¿Qué propiedades de simetría presenta su transformada de Fourier $X(\Omega)$?
 - (a) $X(\Omega) = X^*(\Omega)$.
 - (b) $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$.
 - (c) $X(\Omega) = -X^*(\Omega)$.
 - (d) $X(\Omega) = -X^*(-\Omega)$.
5. ¿Cuál de las siguientes expresiones se corresponde con la propiedad de dualidad de la Transformada de Fourier?
 - (a) Si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, entonces $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega)$.
 - (b) Si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, entonces $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-\Omega)$.
 - (c) Si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, entonces $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(\Omega)$.
 - (d) Si $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, entonces $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(\Omega)$.

6. Se dispone de una señal $x(t)$ cuyas $n - 1$ primeras derivadas son continuas y cuya n -ésima derivada presenta una discontinuidad. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre esta señal $x(t)$ es cierta?
- (a) Si $n > 2$, no es posible garantizar la convergencia de su transformada de Fourier.
 - (b) Su transformada de Fourier decae en frecuencia según $1/\Omega^n$.
 - (c) Su transformada de Fourier decae en frecuencia según $1/\Omega^{n+1}$.
 - (d) Su transformada de Fourier decae en frecuencia según $1/\Omega^{n-1}$.
7. Si $X(\Omega)$ es la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, ¿cuál es la transformada de Fourier de la señal $x(t - \tau)$, con $\tau > 0$?
- (a) $X(\Omega)e^{-j\Omega\tau}$.
 - (b) $X(\Omega)e^{j\Omega\tau}$.
 - (c) $X(\Omega)e^{j\tau}$.
 - (d) $X(\Omega)e^{-j\tau}$.
8. En relación con el fenómeno de Gibbs, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- (a) El *overshoot* se reduce gradualmente a medida que aumenta B , pues la señal limitada en banda tiende a parecerse más a la señal original de ancho de banda infinito.
 - (b) El *overshoot* aumenta gradualmente a medida que aumenta B , pues la señal presenta mayor contenido de altas frecuencias.
 - (c) El *overshoot* se mantiene constante independientemente de B , excepto cuando $B \rightarrow \infty$, en cuyo caso desaparece.
 - (d) El instante de tiempo en el que aparece el *overshoot* se mantiene constante independientemente de B , excepto cuando $B \rightarrow \infty$, en cuyo caso coincide con el origen de tiempo $t = 0$.
9. Un dispositivo electrónico genera a su salida una señal periódica cuadrada $x(t)$ como la que se muestra a continuación, con $\Delta = T/2$:

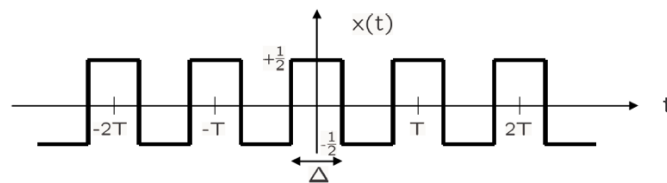


Figura 26. Señal periódica cuadrada.

- ¿Qué coeficientes de Fourier presenta la serie de Fourier de esta señal?
- (a) $c_n = (1/2)[\text{sinc}(n/2) - 1]$.
 - (b) $c_n = (1/2)[\text{sinc}(n) - \text{sinc}(n/2)]$.
 - (c) $c_n = (1/2) \text{sinc}(n/2) (1 - e^{-j\pi n})$.
 - (d) $c_n = (1/2)[\text{sinc}(n/2) - \text{sinc}(n)]$.
10. Se dispone de un sistema cuya respuesta impulsional viene dada por $h(t) = \Pi(t\Omega_0/2\pi)$, siendo Ω_0 una constante. Si a la entrada de este sistema tenemos la señal $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$, ¿cuál es la transformada de Fourier $Y(\Omega)$ de la señal $y(t)$ que obtendremos a la salida?
- (a) $Y(\Omega) = (2\pi/\Omega_0) \text{sinc}((\Omega - \Omega_0)/2\pi)$.
 - (b) $Y(\Omega) = (2\pi/\Omega_0) \text{sinc}(\Omega/\Omega_0)$.

- (c) $Y(\Omega) = (2\pi/\Omega_0) \text{sinc}(\Omega/\Omega_0) * \delta(\Omega - \Omega_0)$.
(d) $Y(\Omega) = 0$.

11. ¿A qué tipo de filtro (paso-bajo, paso-alto, paso-banda o rechazo-banda) corresponde cada una de las siguientes respuestas impulsionales/frecuenciales?

- (a) $h(t) = \text{sinc}(Bt) \cos(\Omega_0 t)$, siendo $\Omega_0 \gg B$.
(b) $H(\Omega) = 1/(\alpha + j\Omega)$, con $\alpha > 0$.
(c) $H(\Omega) = 1 - \Pi(\Omega/(2\pi B))$, con $B > 0$.
(d) $h(t) = \Pi((t - T/2)/T)$, con $T > 0$.

12. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

- (a) Bajo ciertas condiciones, el muestreo de una señal analógica es un proceso reversible.
(b) Bajo ciertas condiciones, la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto es un proceso reversible.
(c) Bajo ciertas condiciones, el *aliasing* es un proceso reversible.
(d) Bajo ciertas condiciones, la conversión A/D es un proceso reversible.

13. ¿Cuál de las siguientes frecuencias de muestreo es más conveniente utilizar al muestrear la señal $x(t) = \sin(2\pi 50t)$?

- (a) $F_m = 100 \text{ Hz}$.
(b) $F_m = 50 \text{ Hz}$.
(c) $F_m = 150 \text{ Hz}$.
(d) $F_m = 25 \text{ Hz}$.

14. Tras un proceso de muestreo ideal realizado, cumpliendo con el criterio de Nyquist, a una frecuencia de muestreo F_m (expresada en Hz), ¿en qué margen de frecuencias están ubicadas, en el espectro de la señal muestreada, las réplicas de la transformada de Fourier de la señal original previa al muestreo que hay que eliminar en la conversión D/A?

- (a) $|f| > F_m$.
(b) $|f| > F_m/2$.
(c) $|f| > 2F_m$.
(d) $|f| < 2F_m$.

15. Tenemos la señal $x(t) = \cos(2\pi 100t)$, la muestreamos a una $\Omega_m = 2\pi 250 \text{ rad/seg}$ mediante un tren de deltas, y a continuación aplicamos un filtro de respuesta impulsional $h(t) = \text{sinc}(400t)$. ¿Cuál es la señal analógica que hemos recuperado a la salida del filtro?

- (a) $x_r(t) = \cos(2\pi 100t)$.
(b) $x_r(t) = (5/8) \cos(2\pi 100t)$.
(c) $x_r(t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 150t)$.
(d) $x_r(t) = (5/8)[\cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 150t)]$.

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. La respuesta correcta es la **(b)**, tal y como se indica en la sección 1.
2. La respuesta correcta es la **(b)**, tal y como se indica en el apartado 1.4. Nótese que la respuesta (a) es falsa, ya que la condición a la que hace referencia es suficiente a nivel de convergencia, pero no necesaria. La respuesta (c) también es falsa, ya que la señal delta de Dirac presenta un valor infinito en el origen, no un valor unitario, que es lo que sí ofrecen, sin embargo, la función delta de Kronecker o la señal delta discreta. Finalmente, la respuesta (d) también es falsa, ya que existen señales como $x(t) = (1 + t^2)^{-1/2}$, que son cuadráticamente integrables, pero no absolutamente integrables.
3. La respuesta correcta es la **(d)**, según se desprende de las propiedades de simetría presentadas en el apartado 2.2.
4. La respuesta correcta es la **(b)**, según se desprende de las propiedades de simetría presentadas en el apartado 2.2.
5. La respuesta correcta es la **(a)**, tal y como se indica en la propiedad de dualidad presentada en el subapartado 2.1.6.
6. La respuesta correcta es la **(c)**, tal y como se indica en el apartado 3.1.
7. La respuesta correcta es la **(a)**, conclusión a la que se llega partiendo de que $x(t - \tau) = x(t) * \delta(t - \tau)$ y aplicando la propiedad de convolución de la Transformada de Fourier, dando lugar a que $\mathcal{F}[x(t) * \delta(t - \tau)] = \mathcal{F}[x(t)]\mathcal{F}[\delta(t - \tau)] = X(\Omega)e^{-j\Omega\tau}$.
8. La respuesta correcta es la **(c)**, de acuerdo con la discusión presentada en el apartado 3.2.
9. La respuesta correcta es la **(d)**, ya que la señal básica contenida dentro de un periodo de esta señal periódica es $x_b(t) = \Pi(t/\Delta) - (1/2)\Pi(t/T)$. Aplicando la Transformada de Fourier, obtenemos que $X_b(\Omega) = \Delta \text{sinc}((\Omega\Delta)/(2\pi)) - (T/2) \text{sinc}((\Omega T)/(2\pi))$. Tras lo cual, aplicamos esta expresión de $X_b(\Omega)$ en $c_n = (1/T)X_b(2\pi n/T)$, que es el resultado obtenido en (109), y, con $\Delta = T/2$, obtenemos que $c_n = (1/2)[\text{sinc}(n/2) - \text{sinc}(n)]$.
10. La respuesta correcta es la **(d)**. Hay que tener en cuenta que la señal a la salida de un sistema viene dada por $y(t) = x(t) * h(t)$, cuya transformada de Fourier viene dada por $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$. Sustituyendo las transformadas de Fourier de la señal y de la respuesta impulsional, obtenemos $X(\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0)$ y $H(\Omega) = (2\pi/\Omega_0) \text{sinc}(\Omega/\Omega_0)$. Finalmente, multiplicando ambas transformadas entre sí, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 Y(\Omega) &= \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{sinc}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right) \delta(\Omega - \Omega_0) = \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0}\right) \delta(\Omega - \Omega_0) \\
 &= \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{sinc}(1) \delta(\Omega - \Omega_0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{155}$$

11. La respuesta impulsional en **(a)** se corresponde con un filtro paso-banda, ya que su respuesta en frecuencia presenta la misma forma que la respuesta ideal mostrada en la Figura 21 (parte inferior izquierda) para este tipo de filtros. La respuesta frecuencial en **(b)** se corresponde con un filtro paso-bajo, ya que el comportamiento del módulo de la respuesta frecuencial mostrada en la Figura 5 es el de dejar pasar las frecuencias bajas alrededor de la frecuencia continua y atenuar las frecuencias altas (*i.e.* la amplitud del módulo de la respuesta frecuencial del filtro disminuye gradualmente a medida que la frecuencia aumenta). La respuesta frecuencial en **(c)** se corresponde con un filtro paso-alto, ya que su respuesta en frecuencia presenta la misma forma que la respuesta ideal mostrada en la Figura 21 (parte superior derecha) para este tipo de filtros. La respuesta impulsional en **(d)** se corresponde con un filtro paso-bajo, ya que su respuesta en frecuencia deja pasar las frecuencias bajas alrededor del origen y atenúa las altas.
12. Las afirmaciones correctas son la **(a)** y la **(b)**. El muestreo de una señal analógica puede ser un proceso reversible; en particular, si la señal analógica original es una señal de ancho de banda finito (*i.e.* señal de banda limitada) y si el proceso de muestreo consiste en un muestreo ideal con tren de deltas a una frecuencia de muestreo igual o superior al doble del ancho de banda de la señal analógica original (*i.e.* si se cumple el criterio de Nyquist), entonces el muestreo es reversible, puesto que la señal analógica original puede ser íntegramente recuperada a partir de la señal muestreada mediante la aplicación de un filtro interpolador ideal (*i.e.* un filtro paso-bajo ideal de frecuencia de corte igual a la mitad de la frecuencia de muestreo y de amplitud igual al periodo de muestreo). El muestreo no es otra cosa que la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto, con lo que dicha conversión puede ser un proceso reversible. El *aliasing* no puede ser un proceso reversible, puesto que el *aliasing* no es ningún proceso: es un fenómeno que sucede en el espectro de una señal muestreada si el muestreo ha sido realizado sin que se cumpla el criterio de Nyquist. La conversión A/D (*i.e.* muestreo + cuantificación + codificación) nunca es un proceso reversible, puesto que el proceso de cuantificación es por definición irreversible.
13. Solo las respuestas (a) y (c) cumplen con el criterio de Nyquist. Sin embargo, solo la respuesta (c) garantiza que la señal del muestreo no será igual a cero. La respuesta correcta es, por tanto, la **(c)**.
14. La respuesta correcta es la **(b)**, ya que la señal muestreada contiene réplicas de la transformada de Fourier centradas en los múltiplos entero de F_m , con lo que solo la réplica ubicada en el margen frecuencial $(-F_m/2, F_m/2)$ es la que ha de ser preservada en la conversión D/A, de modo que el filtro interpolador ha de eliminar todo el contenido espectral ubicado en $|f| > F_m/2$.
15. La respuesta correcta es la **(d)**. El muestreo cumple con el criterio de Nyquist, con lo que las réplicas del espectro de la señal original se replican sin *aliasing* en cada múltiplo entero de $2\pi 250 \text{ rad/seg}$. Así, teniendo en cuenta que la señal original es cosenoidal, vemos que, aplicando (144), el espectro de la señal muestreada es el siguiente:

$$X_m(\Omega) = 250 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega + 2\pi n 250) + \delta(\Omega - 2\pi n 250) \quad (156)$$

El filtro aplicado tras el muestreo es un paso-bajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = 2\pi 200 \text{ rad/seg}$ y amplitud $1/400$ en la banda de paso. Por lo tanto, la transformada de Fourier de la señal de salida del filtro es la siguiente:

$$X_r(\Omega) = \frac{250}{400} [\delta(\Omega + 2\pi 150) + \delta(\Omega + 2\pi 100) + \delta(\Omega - 2\pi 100) + \delta(\Omega - 2\pi 150)] \quad (157)$$

Con lo que, aplicando la Transformada inversa de Fourier, la señal de salida del filtro es:

$$x_r(t) = \frac{5}{8} [\cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 150t)] \quad (158)$$

Bibliografía

Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., & Buck, J. R. (1999). *Discrete-Time Signal Processing* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulo 4).

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1996). *Signals & Systems* (2nd ed.). Prentice Hall, Signal Processing Series (Capítulos 3, 4, 6 y 7).

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.

Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Digital Signal Processing* (4th ed.). Prentice Hall (Apartados 1.4, 4.1, 4.3, 5.1, 5.2, 5.4; Capítulo 6).