

Universitat Oberta de Catalunya (UOC)

# Anexo al Módulo 1

Señales analógicas y digitales

Germán Cobo Rodríguez  
15/09/2020



## Índice

<b>Introducción</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Números complejos</b> .....	<b>6</b>
1.1. Uso de MATLAB para trabajar con números complejos .....	8
<b>2. Series numéricas</b> .....	<b>10</b>
2.1. Series aritméticas .....	10
2.2. Series geométricas .....	10
2.3. Sumatorios de potencias.....	11
<b>3. Logaritmos</b> .....	<b>12</b>
<b>4. Funciones trigonométricas</b> .....	<b>13</b>
<b>5. Uso de MATLAB en los ejercicios del Módulo 1</b> .....	<b>15</b>
5.1. Ejemplo 1.....	15
5.2. Ejemplo 2.....	18
5.3. Ejemplo 3.....	19
5.4. Ejemplo 4.....	21
5.5. Ejemplo 5.....	22
5.6. Ejemplo 6.....	24
5.7. Ejemplo 7.....	26
5.8. Ejemplo 8.....	29
5.9. Ejemplo 9.....	32
5.10. Ejemplo 10.....	35
5.11. Ejemplo 11.....	42
5.12. Ejemplo 12.....	49
5.13. Ejemplo 13.....	54
5.14. Ejemplo 15.....	60
5.15. Ejemplo 16.....	61
5.16. Ejemplo 17.....	62
5.17. Ejemplo 18.....	65
5.18. Ejemplo 19.....	70
5.19. Ejemplo 20.....	72
<b>6. Demostraciones del Módulo 1</b> .....	<b>78</b>
<b>7. Introducción a las Series de Fourier</b> .....	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b> .....	<b>85</b>



## Introducción

Este Anexo al Módulo 1 cumple dos funciones. Por un lado, incluye algunas secciones (1-4) de repaso de conceptos matemáticos básicos que el estudiante Señales y sistemas I ya conoce y que debería dominar con soltura para poder encarar con garantías la asignatura.

Por otro lado, la sección 5 incluye las versiones extendidas y detalladas de las soluciones a los ejercicios del Módulo 1 que incluyen un uso más o menos intenso de MATLAB. De este modo, aquellos estudiantes interesados en conocer los detalles acerca de cómo se puede usar MATLAB para definir señales, operar con ellas y representarlas gráficamente, y así como también para hacer comprobaciones de los cálculos realizados a mano, pueden consultar esta sección.

Asimismo, la sección 6 incluye las demostraciones de algunos teoremas planteados a lo largo del desarrollo del Módulo 1.

Y, finalmente, la sección 7 incluye una breve introducción a las Series de Fourier, por ser un tema que puede llegar a introducirse ya en el Módulo 1, pero que se trabajará mucho más en detalle en módulos posteriores.

## 1. Números complejos

En esta sección, se repasa cómo trabajar con números complejos.

De entrada, todo número complejo está constituido por una parte real y una parte imaginaria, y que puede expresarse como la suma de su parte real más su parte imaginaria multiplicada por el número imaginario:

$$\alpha = \Re(\alpha) + j\Im(\alpha) \quad (1)$$

allí donde  $\alpha$  es un número complejo cualquiera ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ),  $\Re(\alpha)$  es su parte real ( $\Re(\alpha) \in \mathbb{R}$ ),  $\Im(\alpha)$  es su parte imaginaria ( $\Im(\alpha) \in \mathbb{R}$ ), y  $j$  es el número imaginario ( $j = \sqrt{-1}$ , de modo que  $j \in \mathbb{C}$ ). Así, por ejemplo, el número  $1 + 2j$  tiene parte real 1 y parte imaginaria 2.

Como se muestra en la Figura 1, todo número complejo puede representarse como un punto en el plano complejo, allí donde el eje de abscisas representa la parte real y el eje de ordenadas la parte imaginaria. Así, un número complejo  $\alpha$  cualquiera es el punto  $(\Re(\alpha), \Im(\alpha))$ . Por ejemplo, el número imaginario es tal que  $\Re(j) = 0$  y  $\Im(j) = 1$ , de modo que es el punto  $(0,1)$ . Además, de todo número complejo puede obtenerse su conjugado, que no es más que el resultado de cambiarle el signo su parte imaginaria:

$$\alpha^* = \Re(\alpha) - j\Im(\alpha) \quad (2)$$

allí donde  $\alpha^*$  es el complejo conjugado de  $\alpha$ .

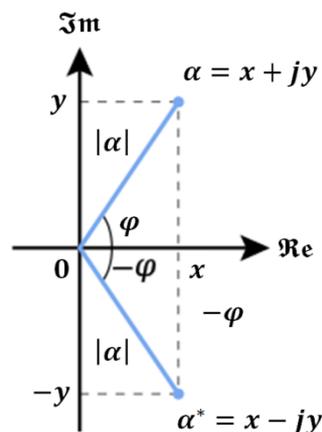


Figura 1. Representación de un número complejo cualquiera ( $\alpha$ ) y su conjugado ( $\alpha^*$ ) en el plano complejo<sup>1</sup>. También se muestran su módulo ( $|\alpha|$ ) y su fase ( $\varphi$ ), así como los de su conjugado ( $|\alpha|$  y  $-\varphi$ ).

Como también se observa en la Figura 1, puesto que un número complejo no es más que un punto en un plano cartesiano, además de una parte real y una parte imaginaria (que no son más que sus coordenadas cartesianas), todo número complejo también tiene un módulo y una fase (que no son más que sus coordenadas polares). Así pues, también es posible expresar

<sup>1</sup> Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_complejo](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo)

todo número complejo a partir de su módulo y su fase (o argumento) haciendo uso de la exponencial compleja:

$$\alpha = |\alpha|e^{j\mathfrak{A}rg(\alpha)} \quad (3)$$

allí donde  $|\alpha|$  es el módulo de  $\alpha$ ,  $\mathfrak{A}rg(\alpha)$  es la fase de  $\alpha$  (expresada en unidades de radianes: *rad*), y  $e^{j\mathfrak{A}rg(\alpha)}$  es un número complejo de módulo 1 y fase  $\mathfrak{A}rg(\alpha)$ . La representación de un número complejo en forma de módulo y fase es conocida comúnmente como «fasor».

Tal y como se muestra en la Figura 2, **la exponencial compleja  $e^{j\varphi}$**  es un número complejo de **módulo 1** ( $|e^{j\varphi}| = 1$ ) y **fase  $\varphi$**  ( $\mathfrak{A}rg(e^{j\varphi}) = \varphi$ ). O, dicho de otro modo,  $e^{j\varphi}$  está a una distancia 1 del origen de coordenadas y se eleva un ángulo  $\varphi$  sobre el eje de abscisas, lo cual permite entender por qué su parte real es  $\cos \varphi$  ( $\mathfrak{R}e(e^{j\varphi}) = \cos \varphi$ ) y su parte imaginaria  $\sin \varphi$  ( $\mathfrak{I}m(e^{j\varphi}) = \sin \varphi$ ):

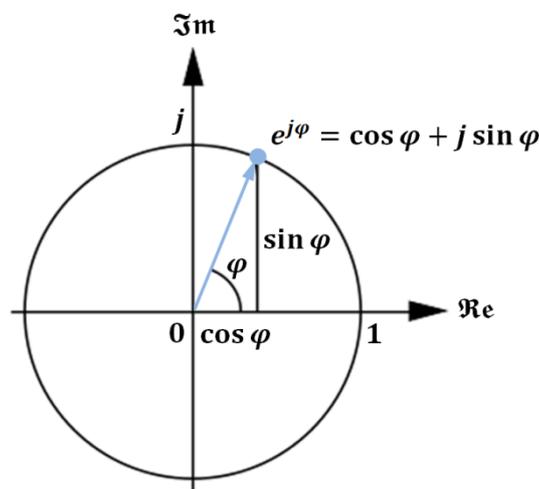


Figura 2. Representación fasorial de la exponencial compleja  $e^{j\varphi}$  en el plano complejo<sup>2</sup>.

En general, la parte real y la parte imaginaria de todo número complejo están relacionadas con su módulo y su fase de la siguiente manera:

$$|\alpha| = +\sqrt{(\mathfrak{R}e(\alpha))^2 + (\mathfrak{I}m(\alpha))^2}$$

$$\mathfrak{A}rg(\alpha) = \text{atan}\left(\frac{\mathfrak{I}m(\alpha)}{\mathfrak{R}e(\alpha)}\right) \quad (4)$$

$$\mathfrak{R}e(\alpha) = |\alpha| \cos(\mathfrak{A}rg(\alpha))$$

$$\mathfrak{I}m(\alpha) = |\alpha| \sin(\mathfrak{A}rg(\alpha))$$

Así, por ejemplo, respecto del número imaginario, que es tal que  $\mathfrak{R}e(j) = 0$  y  $\mathfrak{I}m(j) = 1$ , también sabemos que  $|j| = 1$  y  $\mathfrak{A}rg(j) = \frac{\pi}{2}$ , de modo que  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ .

También se observa en la Figura 1 que cambiarle el signo a la parte imaginaria de un número complejo es exactamente lo mismo que cambiarle el signo a su fase dejando intacto su

<sup>2</sup> Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_complejo](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complejo)

módulo. De este modo, el complejo conjugado también puede expresarse en términos de módulo y fase:

$$\alpha^* = \Re(\alpha) - j\Im(\alpha) = |\alpha|e^{-j\mathcal{A}rg(\alpha)} \quad (5)$$

allí donde  $\alpha^*$  es el complejo conjugado de  $\alpha$ .

Así las cosas, al operar con números complejos, es conveniente expresarlos mediante sus partes real e imaginaria o mediante su módulo y su fase en función de la operación que se esté realizando. Puesto que puede hacerse indistintamente de un modo o del otro, de lo que se trata es de escoger en cada momento el modo que permita simplificar al máximo posible los cálculos a realizar:

- Suma/Resta de complejos: las partes real e imaginaria se suman/restan por separado.

$$\alpha + \beta = (\Re(\alpha) + \Re(\beta)) + j(\Im(\alpha) + \Im(\beta)) \quad (6)$$

$$\alpha - \beta = (\Re(\alpha) - \Re(\beta)) + j(\Im(\alpha) - \Im(\beta))$$

- Producto/División de complejos: producto/división de módulos y suma/resta de fases.

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta|e^{j(\mathcal{A}rg(\alpha)+\mathcal{A}rg(\beta))} \quad (7)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}e^{j(\mathcal{A}rg(\alpha)-\mathcal{A}rg(\beta))}$$

- Potencia a la  $n$  de un complejo: módulo elevado a la  $n$  y producto de  $n$  por la fase.

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ veces}} = |\alpha|^n e^{jn\mathcal{A}rg(\alpha)} \quad (8)$$

allí donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos, y  $n$  es un número real.

Y, básicamente, esto es todo lo que hace falta saber sobre números complejos para manejarse con soltura en la teoría de señales y sistemas. Si en algún momento puntual es necesario recurrir a conocimientos más avanzados sobre este tema, ya lo haremos.

Dicho esto, es muy importante tener siempre presentes y muy por la mano los fundamentos que hemos repasado aquí, puesto que se utilizan constantemente a lo largo de toda la teoría de señales y sistemas que se estudia tanto en este primer módulo como en los módulos posteriores.

## 1.1. Uso de MATLAB para trabajar con números complejos

Finalmente, unas breves indicaciones útiles sobre **comandos y funciones MATLAB para trabajar con señales complejas**:

- **Los comandos  $i$  y  $1j$**  simbolizan indistintamente el número imaginario. De este modo, las letras  $i$  y  $j$  pueden ser usadas como variables.

- Las funciones `real`, `imag`, `abs`, `angle` y `conj` calculan, respectivamente, la parte real, la parte imaginaria, el módulo, la fase (en *rad*) y el conjugado de valores complejos.

Y, a continuación, un ejemplo de un código MATLAB en el que se definen y representan gráficamente dos señales completas:

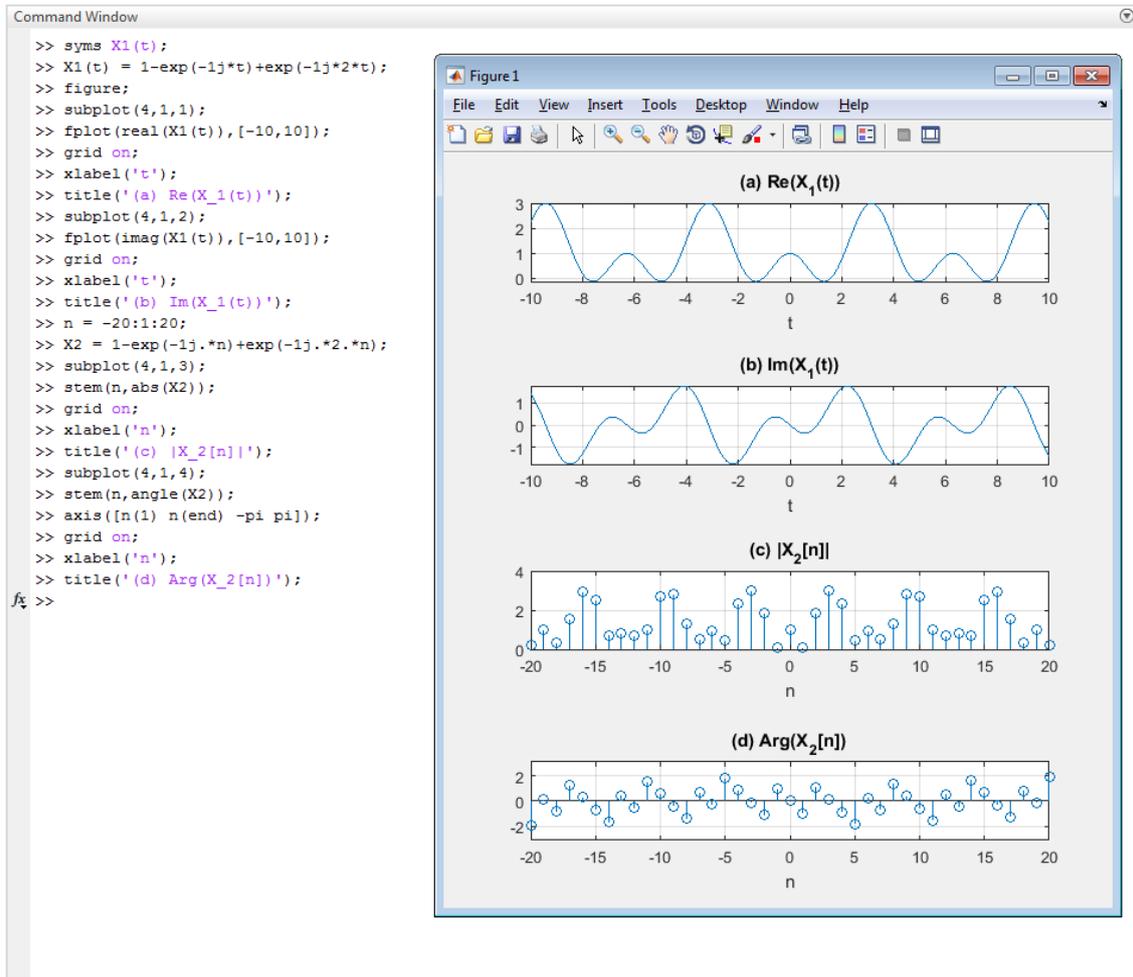


Figura 3. Ejemplo de uso de comandos MATLAB para trabajar con señales complejas.

## 2. Series numéricas

En esta sección, se da un breve repaso los dos tipos de series numéricas más habituales en la teoría de señales y sistemas: las series aritméticas y las series geométricas.

### 2.1. Series aritméticas

Una **serie aritmética** es aquella en la que **la diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera de la serie es constante a lo largo de toda la serie**:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i = a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2} =$$

$$a_{n_1} + \underbrace{(a_{n_1} + d)}_{a_{n_1+1}} + \underbrace{(a_{n_1} + 2d)}_{a_{n_1+2}} + \dots + \underbrace{(a_{n_1} + (n_2 - n_1)d)}_{a_{n_2}} \quad (9)$$

allí donde  $a_i = a_{i-1} + d, \forall i \in \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$ , siendo  $n_1 < n_2$ , y donde  $d$  es un valor constante denominado **diferencia de la serie**, tal que  $d = a_i - a_{i-1}$ .

Asimismo, el resultado de toda serie aritmética viene dado por **el producto de la mitad del número de términos de la serie por la suma del primer y último términos de la serie**:

$$\boxed{\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i = \frac{n_2 - n_1 + 1}{2} (a_{n_1} + a_{n_2})} \quad (10)$$

### 2.2. Series geométricas

Una **serie geométrica** es aquella en la que **cada término de la serie se obtiene multiplicando su término anterior por un valor constante**; o sea, es aquella serie en que **la razón entre dos términos sucesivos cualesquiera de la serie es constante a lo largo de toda la serie**:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i = a_{n_1} + a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2} =$$

$$a_{n_1} + \underbrace{(ra_{n_1})}_{a_{n_1+1}} + \underbrace{(r^2a_{n_1})}_{a_{n_1+2}} + \dots + \underbrace{(r^{n_2-n_1}a_{n_1})}_{a_{n_2}} \quad (11)$$

allí donde  $a_i = ra_{i-1}, \forall i \in \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$ , siendo  $n_1 < n_2$ , y donde  $r$  es un valor constante denominado **razón de la serie**, tal que  $r = \frac{a_i}{a_{i-1}}$ .

Asimismo, el resultado de toda serie geométrica se calcula restando **el primer término de la serie menos el producto de la razón por el último término de la serie, todo ello dividido entre uno menos la razón**:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i = \frac{a_{n_1} - r a_{n_2}}{1 - r} \quad (12)$$

### 2.3. Sumatorios de potencias

Un **sumatorio de potencias** no es más que una **serie numérica cuyo término general es el índice del sumatorio elevado a una constante**; es decir, es una serie numérica de la forma:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} n^i = n_1^i + (n_1 + 1)^i + \dots + (n_2 - 1)^i + n_2^i \quad (13)$$

allí donde  $i$  es un valor constante y  $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ , siendo  $n_1 \leq n_2$ .

En general, el índice de un sumatorio de potencias suele recorrer únicamente valores positivos (es decir, con  $n_1 = 1$  y  $n_2 = N$ ) y, para este caso general, **el término dominante del sumatorio de potencias de orden  $i$  es siempre de orden  $i + 1$** :

$$\sum_{n=1}^N n^i = 1^i + 2^i + \dots + (N - 1)^i + N^i = \alpha N^{i+1} + \beta N^i + \dots + \omega N \quad (14)$$

allí donde  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  son constantes cuyos valores son irrelevantes a estos efectos.

En particular, los resultados de los sumatorios de potencias de orden 2 y 4 son los siguientes:

$$\sum_{n=1}^N n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (N - 1)^2 + N^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^N n^4 = 1^4 + 2^4 + \dots + (N - 1)^4 + N^4 = \frac{N^5}{5} + \frac{N^4}{2} + \frac{N^3}{3} - \frac{N}{30} \quad (16)$$

### 3. Logaritmos

En esta sección, se repasan algunas cosas básicas que conviene tener siempre presentes al trabajar con logaritmos.

En primer lugar, el logaritmo en base  $a$  de  $x$  es el exponente al que hay que elevar a  $a$  para obtener  $x$ :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad (17)$$

En segundo lugar, y como consecuencia directa de lo anterior, **el logaritmo en base  $a$  y la exponencial en base  $a$  son operaciones inversas entre sí:**

$$\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x \quad (18)$$

En tercer lugar, hay algunas **relaciones logarítmicas** de especial interés práctico:

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad (19)$$

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \quad (20)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \quad (21)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (22)$$

Y, en cuarto lugar, los dos logaritmos más habitualmente usados en la práctica son el **logaritmo en base 10** ( $\log_{10}$  o, más usualmente,  $\log$ ) y el **logaritmo en base  $e$**  ( $\log_e$  o, más usualmente,  $\ln$ ), este último también denominado «logaritmo neperiano» o «logaritmo natural».

A este último respecto, hay una distinción importante respecto del uso de **logaritmos en MATLAB:**

- La función `log10` calcula el logaritmo en base 10.
- La función `log` calcula el logaritmo neperiano.

## 4. Funciones trigonométricas

En esta sección, se repasan algunas cosas básicas que conviene tener siempre presentes al trabajar con funciones trigonométricas.

En primer lugar, las funciones trigonométricas fundamentales son las funciones seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan).

En segundo lugar, y salvo en las funciones trigonométricas inversas (arcsin, arccos, arctan), el argumento de las funciones trigonométricas se expresa en unidades de **radianes** (*rad*).

En tercer lugar, y de nuevo a excepción de las funciones trigonométricas inversas (arcsin, arccos, arctan), las funciones trigonométricas son **periódicas**. Más concretamente, sin y cos tienen un periodo de  $2\pi \text{ rad}$ , mientras que *tan* tiene un periodo de  $\pi \text{ rad}$ .

En cuarto lugar, hay algunas **relaciones trigonométricas** muy básicas que se deben tener siempre muy presentes. Aquí nos limitaremos a recordar aquellas que permiten poner en relación a sin, cos y tan:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (23)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (24)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (25)$$

En cuarto lugar, son de una importancia capital en la teoría de señales y sistemas las **fórmulas de Euler**, que relacionan las funciones trigonométricas con la **exponencial compleja**:

$$\boxed{e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)} \quad (26)$$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}} \quad (27)$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}} \quad (28)$$

$$\tan(x) = -j \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{e^{jx} + e^{-jx}} \quad (29)$$

allí donde  $j$  es el número imaginario<sup>3</sup>.

Y, en quinto lugar, respecto del uso de **funciones trigonométricas en MATLAB**, conviene tener siempre presente lo siguiente:

---

<sup>3</sup> Aunque lo más habitual en la teoría de señales y sistemas es simbolizarlo como  $j$ , el número imaginario puede ser simbolizado indistintamente mediante la letra  $i$  o la letra  $j$ , de modo que  $i = j = \sqrt{-1}$ .

- Las funciones `sin`, `cos` y `tan` calculan, respectivamente, el seno, el coseno y la tangente de valores expresados en *rad*.
- El comando `pi` está reservado para simbolizar el número  $\pi$ .
- Los comandos `1i` y `1j` están reservados para simbolizar indistintamente el número imaginario. De este modo, las letras *i* y *j* pueden ser usadas normalmente como variables.

## 5. Uso de MATLAB en los ejercicios del Módulo 1

En esta sección, se incluyen las versiones extendidas y detalladas de las resoluciones de los ejercicios del Módulo 1 que incluyen el uso de MATLAB para definir señales, operar con ellas, representarlas gráficamente, y realizar toda clase de cálculos. La idea es que estas explicaciones resulten de utilidad a aquellos estudiantes que no tengan experiencia en el uso de MATLAB.

Para facilitar la lectura y la correspondencia con los ejercicios del Módulo 1, cada apartado de la sección incluye un único ejercicio/ejemplo y la numeración de cada ejercicio/ejemplo es la misma que la de su ejercicio/ejemplo correspondiente en el Módulo 1 (lo que sí cambia, inevitablemente, es la numeración de las ecuaciones y figuras).

### 5.1. Ejemplo 1

#### Enunciado

Tenemos las siguientes señales analógicas polinómicas reales:

$$x_1(t) = -\frac{2}{3} \quad (30)$$

$$x_2(t) = 0.5 + t - 2t^2 + t^3 \quad (31)$$

Se pide representarlas gráficamente para  $t \in [-1,1]$ .

#### Solución

Se observa que  $x_1(t)$  es una señal analógica constante negativa y que  $x_2(t)$  es una señal analógica polinómica de orden cúbico.

Utilizaremos MATLAB para definir las señales y obtener su representación gráfica en los intervalos especificados. En primer lugar, empezamos definiendo las señales. **Puesto que se trata de señales analógicas, no podemos definir las explicitándolas numéricamente**, de modo que lo haremos usando **herramientas de matemática simbólica**:

```
>> syms x1(t) x2(t);
>> x1(t) = -2/3;
>> x2(t) = 0.5 + t - (2*t^2) + t^3;
```

Se observa que **las señales analógicas se definen simbólicamente mediante el comando `syms`**. Así, hemos establecido que  $t$  será la variable independiente continua en las señales  $x_1$  y  $x_2$ , cuyas expresiones se definen justo a continuación. Como enseguida veremos en el Ejemplo 2, **esto no lo haremos al trabajar con señales digitales**. La razón de esta diferencia reside en que sí podemos explicitar numéricamente y calcular (con MATLAB o con cualquier otro *software*) todos los valores comprendidos en un intervalo finito de una variable entera, pero no así en el caso de una variable real, pues estos son infinitos. Por tanto, **sí podremos explicitar numéricamente intervalos finitos de señales digitales, pero nunca señales analógicas**.

Asimismo, se observa que, **al definir las señales simbólicamente, las operaciones básicas entre señales se simbolizan directamente mediante los operadores suma (+), resta (-), producto (\*), división (/) y potencia (^)**. Como enseguida veremos en el E, los tres últimos operadores (el producto, la división y la potencia) serán distintos cuando trabajemos con señales definidas explícitamente (es decir, con señales digitales).

En la definición de la expresión de  $x_2(t)$ , se observa que MATLAB permite el uso de espacios y de paréntesis para agrupar términos, establecer prioridades entre operaciones (en caso que sea necesario) y, si así se desea, hacer más fácil la lectura del código.

Se observa también que todos los comandos terminan en punto y coma (;). Esto se hace para desactivar el «eco», es decir, para que MATLAB no muestre por pantalla el resultado de la ejecución del comando. **No usaremos el punto y coma al final de un comando cuando nos interese que MATLAB muestre por pantalla el resultado del mismo.**

Una vez definidas, ya las podemos representar gráficamente. Empezamos con  $x_1(t)$ :

```
>> figure; % Creamos una figura (en MATLAB, sirve para dibujar gráficas)
>> fplot(x1(t), [-1 1]); % Representamos x1(t) en el intervalo t=[-1,1]
>> grid on; % Activamos el grid de la gráfica
>> xlabel('t'); % Etiquetamos el eje de abscisas de la gráfica
>> ylabel('x_1(t)'); % Etiquetamos el eje de ordenadas de la gráfica
```

Y, con estos comandos, hemos obtenido la gráfica siguiente, que, en efecto, vemos que representa el intervalo  $t \in [-1,1]$  de  $x_1(t)$ , que es una constante de valor  $-\frac{2}{3} \cong -0.6667$ :

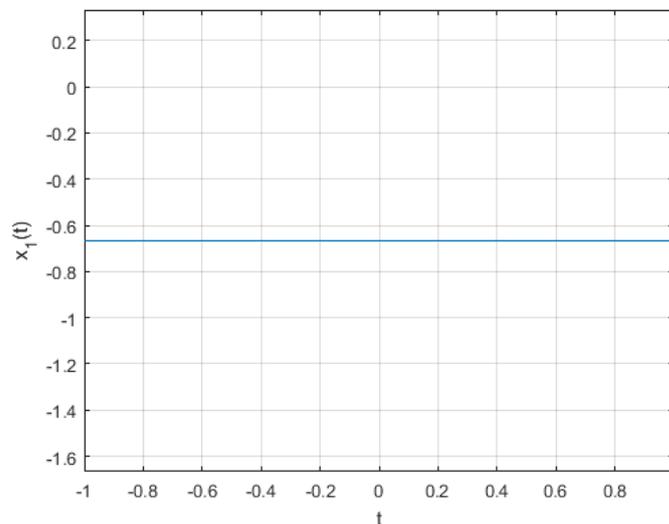


Figura 4. Representación gráfica de  $x_1(t)$ .

Se observa que MATLAB admite la escritura de comentarios. El carácter % está reservado para marcar el inicio del comentario, que queda siempre escrito en color verde.

La función `fplot` permite representar gráficamente señales definidas simbólicamente mediante el comando `syms`. Por tanto, **usaremos `fplot` para representar gráficamente señales analógicas**, especificando siempre entre corchetes los límites del intervalo de representación (`[-1 1]`).

Se observa también que, en MATLAB, las cadenas de texto integradas en el código (como las usadas en las funciones `xlabel` e `ylabel`) se definen siempre entre comillas simples y quedan escritas en color fucsia.

Y ahora pasamos a representar gráficamente  $x_2(t)$ . Podríamos repetir la misma secuencia de comandos que con  $x_1(t)$  y obtener una nueva figura para  $x_2(t)$ . Sin embargo, aprovecharemos para ver cómo representar mediante MATLAB varias señales en una única gráfica:

```
>> figure; % Creamos una figura nueva
>> hold on; % Activamos el modo hold de la gráfica
>> fplot(x1(t), [-1 1]); % Representamos x1(t) en el intervalo t=[-1,1]
>> fplot(x2(t), [-1 1]); % Representamos x2(t) en el intervalo t=[-1,1]
>> grid on; % Activamos el grid de la gráfica
>> xlabel('t'); % Etiquetamos el eje de abscisas de la gráfica
>> legend('x_1(t)', 'x_2(t)', 'Location', 'best'); % Añadimos una leyenda
```

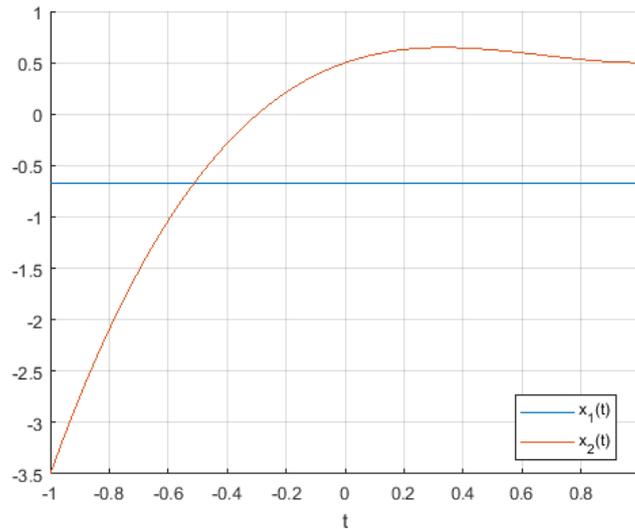


Figura 5. Representación gráfica conjunta de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .

Se observa que el comando `hold on` posibilita la representación sucesiva de señales en una misma gráfica, evitando que cada nueva señal representada elimine a la anterior. Así, hemos hecho dos `fplot` seguidos y la representación de  $x_2(t)$  no ha machacado a la de  $x_1(t)$ . Además, cada nueva señal es representada automáticamente en un color distinto a las anteriores.

Por su parte, la función `legend` es muy útil cuando hay más de una señal representada en la misma gráfica. Tras indicarle las etiquetas con los nombres de las señales (importante: en el mismo orden en que han sido dibujadas), resulta también muy útil indicarle que sitúe automáticamente la leyenda en la «mejor» posición, para evitar, si es posible, que se solape con la representación de alguna de las señales.

Y ya para acabar, comentar que, en MATLAB, es **muy recomendable** utilizar el comando `help` para ver la ayuda de las diferentes funciones y aclarar dudas de sintaxis y descubrir funciones nuevas. Por ejemplo, para saber qué otros parámetros podemos pasarle a la función `legend`, podemos ejecutar el comando `>> help legend` y leer la ayuda de la función. Asimismo, en los menús superiores del entorno de trabajo, se puede acceder al *Help* del programa, que incluye una documentación y una ayuda mucho más detallada.

## 5.2. Ejemplo 2

### Enunciado

Tenemos las siguientes señales digitales polinómicas reales:

$$x_1[n] = 1 + 2n \quad (32)$$

$$x_2[n] = 3 - n - \frac{1}{10}n^2 \quad (33)$$

Se pide representarlas gráficamente para  $n \in \{-10, \dots, 10\}$ .

### Solución

Se observa que  $x_1[n]$  es una recta discreta de ordenada en el origen igual a 1 y pendiente igual a 2 y que  $x_2[n]$  es una señal discreta polinómica de orden cuadrático.

Vamos ahora a definir las dos señales y a representarlas a ambas en la misma gráfica. **Puesto que se trata de señales digitales, las definiremos explícitamente.** Esto quiere decir que:

1. **Definiremos un array que contenga los valores que adopta la variable independiente discreta en el intervalo de interés** (que ha de ser de longitud finita, obviamente).
2. **Cada señal digital será un array que contenga sus valores de amplitud en el intervalo de interés:**

```
>> n = -10:1:10; % Definimos el intervalo de interés de la variable discreta
>> x1 = 1+2.*n; % Definimos x1[n]
>> x2 = 3-n-(1./10).*n.^2; % Definimos x2[n]
>> figure;
>> hold on;
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n]', 'x_2[n]', 'Location', 'best');
```

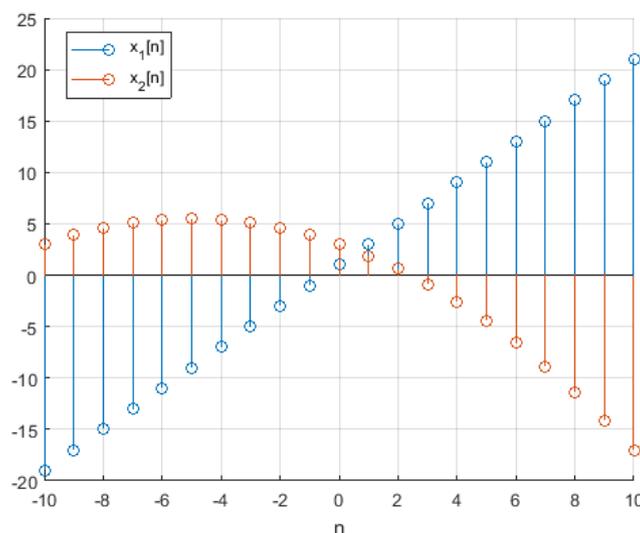


Figura 6. Representación gráfica de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$ .

En la definición de  $n$ , se observa que el operador dos puntos ( $:$ ) sirve para definir una sucesión de valores numéricos equidistantes a partir del valor inicial ( $-10$ ), el incremento ( $1$ ) y el valor final

(10). Esa misma sucesión puede definirse también elemento a elemento, mediante el uso de los corchetes (`[]`). Así, el array que se obtiene al hacer `-10:1:10` es exactamente el mismo que se obtiene al hacer `[-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10]`.

El uso de los corchetes en MATLAB está reservado para definir arrays (vectores y matrices, en general). Por ejemplo, en los `fplot` del E, hemos usado los corchetes para definir el intervalo de la variable `t` que ha de cubrir la gráfica (`[-1 1]`), puesto que la función `fplot` espera recibir este parámetro en forma de un array de dos posiciones.

En las definiciones de `x1` y `x2`, se observa el uso de unos operadores producto (`.*`), división (`./`) y potencia (`.^`) distintos a los usados al definir las señales analógicas en E. En MATLAB, al definir las señales explícitamente, los operadores suma (+), resta (-), producto (\*), división (/) y potencia (^), entre otros, son operadores matriciales; es decir, que, por ejemplo, el operador \* sirve para simbolizar un producto entre dos matrices. En el caso de la suma y la resta, esto no tiene la menor importancia, pero en el caso de los otros tres sí la tiene. Por este motivo, **al trabajar con señales digitales, usaremos siempre los operadores «punto a punto»: producto punto a punto (.\*), división punto a punto (./) y potencia punto a punto (.^)**. En rigor, esto no es siempre necesario; por ejemplo, al operar entre dos escalares, como en la definición de `x2`, no haría falta (`1./10` es lo mismo que `1/10`). Pero sí lo es cuando en la operación interviene la variable independiente (`t^2` ya no es lo mismo que `t.^2`). Así, para simplificar las cosas y evitar errores, seguiremos la disciplina de usar siempre los operadores punto a punto al trabajar con señales digitales.

Y ya para acabar, se observa que la función `stem` permite representar gráficamente señales de variable discreta. Por tanto, **usaremos `stem` para representar gráficamente señales discretas**, especificando el array de valores del eje de abscisas (`n`) y el array de valores del eje de ordenadas (`x1` y `x2`, en cada caso).

### 5.3. Ejemplo 3

#### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales exponenciales reales básicas en los intervalos  $t \in [-10,10]$ , para las señales analógicas, y  $n \in \{-6, \dots, 6\}$ , para las señales digitales:

$$x_1(t) = e^t \quad (34)$$

$$x_2(t) = \left(\frac{1}{e}\right)^t \quad (35)$$

$$x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (36)$$

$$x_4[n] = 2^n \quad (37)$$

$$x_5[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (38)$$

$$x_6[n] = (-2)^n \quad (39)$$

### Solución

Vamos a representar las seis señales de una única tacada, en tres gráficas diferentes (una para las exponenciales analógicas,  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ ; otra para las digitales de base positiva,  $x_3[n]$  y  $x_4[n]$ ; y otra para las digitales de base negativa,  $x_5[n]$  y  $x_6[n]$ ), pero estando todas integradas en una única figura (así vemos cómo se hace esto en MATLAB), tal y como se muestra en la Figura 7:

```
>> syms x1(t) x2(t);
>> x1(t) = exp(t); % Con exp(.) creamos directamente una señal exponencial
>> x2(t) = (1/exp(1))^t; % Con exp(1) obtenemos el número e
>> n = -6:1:6;
>> x3 = (1./2).^n;
>> x4 = 2.^n;
>> x5 = (-1./2).^n;
>> x6 = (-2).^n;
>> figure;
>> subplot(3,1,1); % Creamos una primera subgráfica en la figura
>> hold on;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> fplot(x2(t), [-10 10]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('x_1(t) = e^t', 'x_2(t) = (1/e)^t', 'Location', 'best');
>> title('(a) Señales exponenciales analógicas');
>> subplot(3,1,2); % Creamos una segunda subgráfica en la figura
>> hold on;
>> stem(n,x3);
>> stem(n,x4);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_3[n] = (1/2)^n', 'x_4[n] = 2^n', 'Location', 'best');
>> title('(b) Señales exponenciales digitales de base positiva');
>> subplot(3,1,3); % Creamos una tercera subgráfica en la figura
>> hold on;
>> stem(n,x5);
>> stem(n,x6);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_5[n] = (-1/2)^n', 'x_6[n] = (-2)^n', 'Location', 'best');
>> title('(c) Señales exponenciales digitales de base negativa');
```

La función `exp` permite trabajar directamente la función exponencial en base  $e$  en MATLAB<sup>4</sup>. El argumento que se le pasa a `exp` es el exponente de la función. Así, indistintamente, tanto podemos pasarle sin más el exponente de nuestra señal exponencial (como en el caso de la definición de  $x_1(t)$ ), como podemos escribir `exp(1)` para obtener el número  $e$  y luego usar el operador potencia para añadir el exponente de la señal (como en el caso de  $x_2(t)$ ).

La función `subplot` sirve para crear un tablero de gráficas en el interior de una figura y poder desplazarse por las diferentes gráficas que lo conforman. Esto permite integrar varias gráficas en una misma figura. Su sintaxis más básica es de la forma `subplot(f,c,j)`, siendo  $f$  el número de filas del tablero,  $c$  el número de columnas, y  $j$  el índice de la casilla del tablero (es decir, de la gráfica) a la que se está accediendo (indexando de arriba abajo y de izquierda a derecha). Para más detalles, ver el help de la función.

La función `title` sirve, simplemente, para ponerle título a una gráfica.

<sup>4</sup> Recordemos que  $e$  es un número irracional cuyo valor aproximado es  $e \cong 2.71828$ .

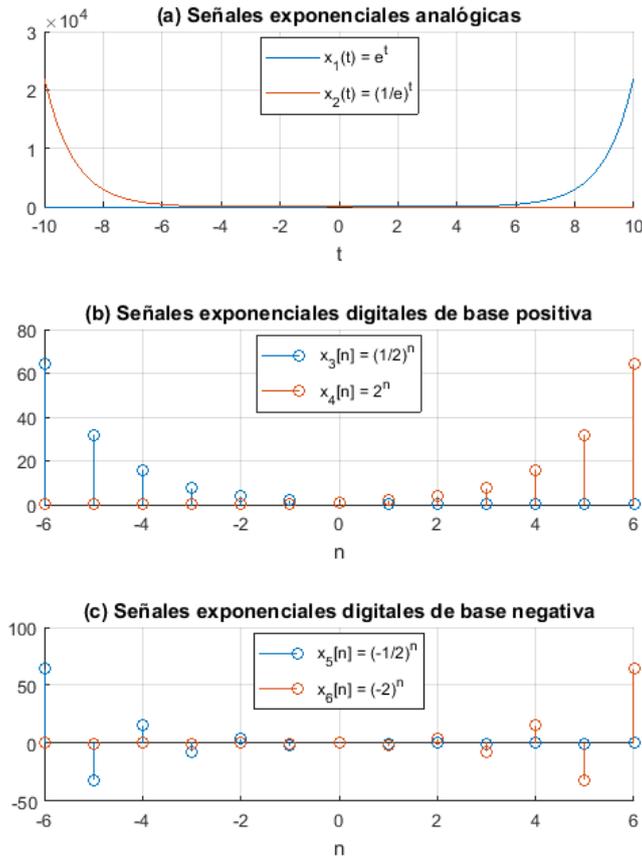


Figura 7. Representación gráfica de señales exponenciales reales básicas.

## 5.4. Ejemplo 4

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales exponenciales reales en los intervalos  $t \in [-4,4]$  y  $n \in \{-6, \dots, 6\}$ :

$$x_1(t) = e^{-t^2} \quad (40)$$

$$x_2[n] = 0.9^{-0.1n^2 - 2n + 1} \quad (41)$$

### Solución

Definimos las señales y obtenemos las gráficas que se muestran en la Figura 8:

```
>> syms x1(t);
>> x1(t) = exp(-t^2);
>> n = -6:1:6;
>> x2 = 0.9.^(-0.1.*n.^2 - 2.*n + 1);
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x1(t), [-4 4]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('x_1(t) = e^{-t^2}', 'Location', 'best');
>> title('(a) Señal exponencial analógica');
>> subplot(2,1,2);
```

```
>> stem(n,x2);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_2[n] = 0.9^{(-0.1n^2-2n+1)}', 'Location', 'best');
>> title('(b) Señal exponencial digital');
```

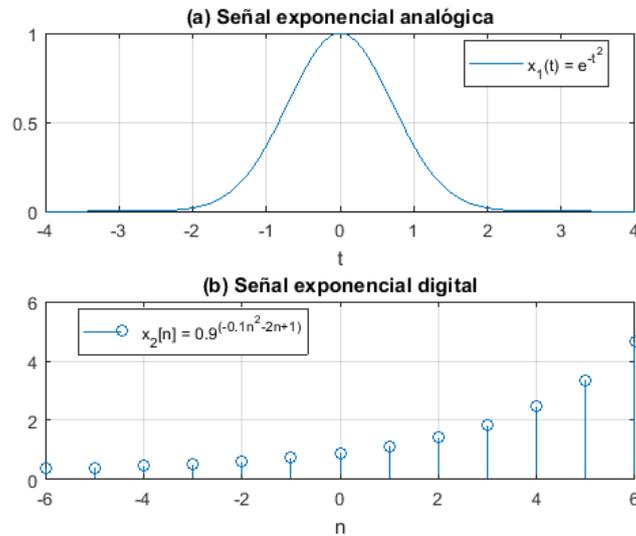


Figura 8. Representación gráfica de señales exponenciales reales con exponente polinómico.

## 5.5. Ejemplo 5

### Enunciado

Se tienen las dos señales siguientes definidas por intervalos:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 10^t - 1 & \text{para } 0 \leq t < 1 \\ 10 - 10^{t-1} & \text{para } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{para } t \geq 2 \end{cases} \quad (42)$$

$$y[n] = \begin{cases} 4 + 4n + 4n^2 & \text{para } n < -2 \\ 0 & \text{para } -2 \leq n < 3 \\ -4 - 4n - 4n^2 & \text{para } n \geq 3 \end{cases} \quad (43)$$

Se pide representarlas gráficamente en los intervalos  $t \in [-1,3]$  y  $n \in \{-20, \dots, 20\}$ .

### Solución

Definimos las señales y obtenemos las gráficas mostradas en la Figura 9:

```
>> syms x(t);
>> x(t) = piecewise(t<0,0,0<=t<1,10^t-1,1<=t<2,10-10^(t-1),t>=2,0);
>> n = -20:1:20;
>> m = n(1):1:-3; % Primer intervalo de y[n]: -20 <= n < 2
>> y1 = 4+4.*m+4.*m.^2; % Señal del primer intervalo de y[n]
>> m = -2:1:2; % Segundo intervalo de y[n]: -2 <= n < 3
>> y2 = zeros(size(m)); % Señal del segundo intervalo de y[n]
>> m = 3:1:n(end); % Tercer intervalo de y[n]: 3 <= n <= 20
>> y3 = -4-4.*m-4.*m.^2; % Señal del tercer intervalo de y[n]
>> y = [y1 y2 y3]; % Concatenamos directamente y1, y2 e y3 para definir y[n]
>> figure;
```

```
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x(t), [-1 3]); % Representamos x(t)
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> ylabel('x(t)');
>> title('a');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y); % Representamos y[n]
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> ylabel('y[n]');
>> title('b');
```

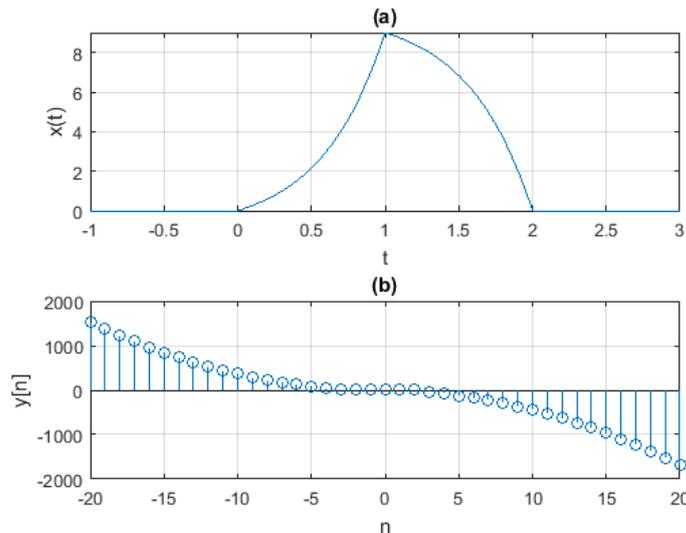


Figura 9. Representación gráfica de señales definidas por intervalos.

En el caso de la señal analógica definida por intervalos ( $x(t)$ ), se construye directamente de una única tacada mediante **la función `piecewise`, que permite definir simbólicamente una señal por intervalos**. Empezando por el primer intervalo, se le especifican, separados mediante comas, los límites del intervalo ( $t < 0$ ) y la expresión de la señal correspondiente a ese intervalo (0). A continuación, y siguiendo con la separación mediante comas, se hace lo propio con el segundo intervalo: los límites del intervalo ( $0 \leq t < 1$ ) y la señal correspondiente a ese intervalo ( $10^t - 1$ ). Y así, sucesivamente, con el resto de intervalos de la señal. Para más detalles, ver el `help` de la función.

En el caso de la señal digital definida por intervalos ( $y$ ), se construyen primero las señales parciales correspondientes a cada uno de los intervalos ( $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ ); a tal efecto, usamos la variable auxiliar `m` para determinar los valores de la variable independiente en cada uno de los intervalos. Y luego, estas señales parciales se concatenan directamente para construir la señal completa; a este respecto, es importante notar **el uso de los corchetes al hacer la concatenación**, debido a que estamos definiendo un nuevo array mediante la concatenación de varios arrays preexistentes:  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]$ . De este modo, después podemos representar la señal definida por intervalos mediante un único `stem`, especificando el intervalo total de muestras que ha de abarcar la representación (`n`).

Se observa que al definir  $y_1$  e  $y_3$ , los valores de la variable independiente en esos intervalos se definen como `m = n(1):1:-3` y `m = 3:1:n(end)`, en lugar de como `m = -20:1:-3` y `m = 3:1:20`, respectivamente. Podría hacerse sin ningún problema de este último modo, pero, al haber definido previamente el intervalo total de representación (`n = -20:1:20`), es más elegante

definirlos mediante `n(1)` y `n(end)`, comandos que permiten indexar, respectivamente, el primer y el último valor de la variable `n` (que no es más que un array de muestras).

Y, para acabar, se observa el uso de `zeros` y `size` en la definición de `y2` (`y2 = zeros(size(m))`). Puesto que `y2` se corresponde con el segundo intervalo de `y[n]` y que todas sus muestras valen 0, usamos la función `size` para calcular el tamaño del intervalo (`size(m)`) y se lo pasamos a la función `zeros` para que retorne tantas muestras de valor 0 como muestras hay en este segundo intervalo. Se recomienda consultar el `help` de estas funciones, para saber más sobre ellas.

## 5.6. Ejemplo 6

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \quad (44)$$

$$x_2[n] = 21 + 2n \quad (45)$$

### Solución

a) Se observa que  $x_1(t)$  no es sino el resultado de transformar la señal siguiente:

$$y_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad (46)$$

Concretamente, se observa que  $x_1(t)$  es el resultado de aplicarle a  $y_1(t)$ , **en el orden que se indica a continuación**, las tres transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la señal es atrasada 4 segs.):  $y_1(t - 4)$
2. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3):  $3y_1(t - 4)$
3. Desplazamiento vertical (se le resta  $\frac{1}{2}$  al *offset* de la señal):  $3y_1(t - 4) - \frac{1}{2}$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = 3y_1(t - 4) - \frac{1}{2} = 3 \left( \frac{1}{1 + e^{-(t-4)}} \right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \quad (47)$$

Obsérvese que, en este caso concreto, el desplazamiento horizontal puede hacerse en cualquier paso, ya que el escalado en amplitud y el desplazamiento vertical (cambios en el eje de ordenadas) no interfieren con la variable independiente (cambios en el eje de abscisas). Aun así, **es muy importante notar que, en general, el orden en el que se aplican las transformaciones es crucial**: no es lo mismo, por ejemplo, desplazar horizontalmente, luego escalar y luego desplazar verticalmente, que desplazar verticalmente, luego escalar y luego desplazar horizontalmente.

Por tanto, representar gráficamente  $x_1(t)$  es exactamente lo mismo que representar gráficamente  $3y_1(t - 4) - \frac{1}{2}$ . Y esto podemos comprobarlo fácilmente con MATLAB. Vamos a dibujar dos gráficas en una misma figura:

- En la primera gráfica, representaremos simultáneamente  $y_1(t)$  y  $3y_1(t - 4) - \frac{1}{2}$ .
- En la segunda gráfica, representaremos simultáneamente  $y_1(t)$  y  $x_1(t)$ .

Esto nos permitirá comprobar tanto si  $x_1(t)$  es ciertamente el resultado de las transformaciones que hemos establecido o no, como si dichas transformaciones provocan ciertamente los efectos que se esperan de ellas:

```
>> syms x1(t) y1(t);
>> x1(t) = 3/(1+exp(-t+4))-1/2;
>> y1(t) = 1/(1+exp(-t));
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(3*y1(t-4)-1/2, [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.6 2.6]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a)');
>> legend('y_1(t)', '3y_1(t-4)-1/2', 'Location', 'best');
>> subplot(2,1,2);
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.6 2.6]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(b)');
>> legend('y_1(t)', 'x_1(t)', 'Location', 'best');
```

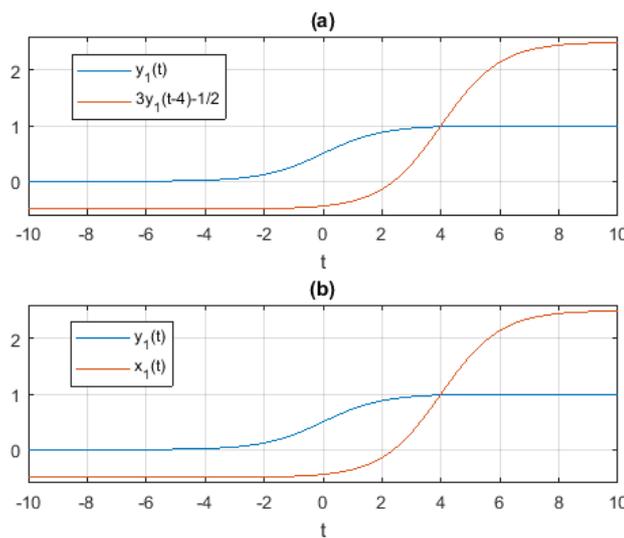


Figura 10. Representaciones gráficas de señales: (a)  $y_1(t)$ ,  $3y_1(t-4) - \frac{1}{2}$ ; (b)  $y_1(t)$ ,  $x_1(t)$ .

En efecto, se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que  $x_1(t) = 3y_1(t-4) - \frac{1}{2}$ . Y además, también se observa, en cualquiera de las dos gráficas, que la señal roja es el resultado de atrasar la señal azul 4 segundos, y luego escalarla en factor 3, y luego restarle  $\frac{1}{2}$  a su *offset*.

b) En este caso, es conveniente trabajar ligeramente la expresión de  $x_2[n]$ :

$$x_2[n] = 21 + 2n = 1 + 2n + 20 = 1 + 2(n + 10) \quad (48)$$

Por tanto, vemos que  $x_2[n]$  no es sino el resultado de atrasar 10 muestras la siguiente señal en forma de recta discretizada:

$$y_2[n] = 1 + 2n$$

$$x_2[n] = y_2[n + 10] = 1 + 2(n + 10) = 21 + 2n$$

(49)

Así, repetimos la misma estrategia que en el apartado anterior:

```
>> n = -20:1:20;
>> x2 = 21+2.*n;
>> y2 = 1+2.*n;
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> stem(n,y2);
>> hold on;
>> stem(n,1+2.*(n+10));
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title(' (a) ');
>> legend('y_2[n]', 'y_2[n+10]', 'Location', 'best');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y2);
>> hold on;
>> stem(n,x2);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title(' (b) ');
>> legend('y_2[n]', 'x_2[n]', 'Location', 'best');
```

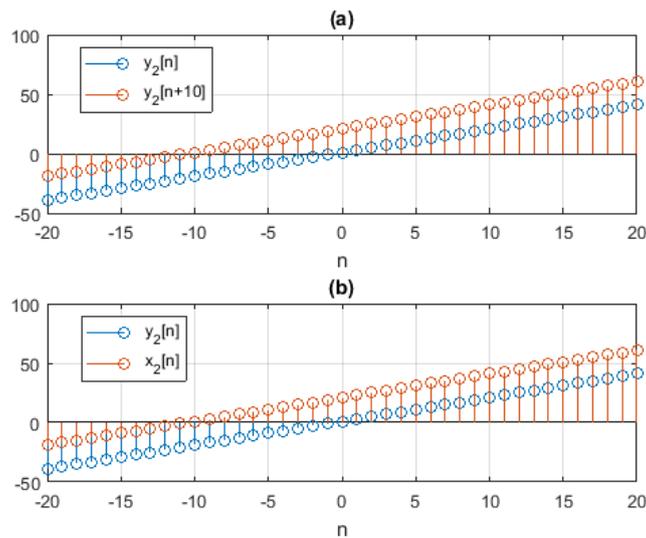


Figura 11. Representaciones gráficas de señales: (a)  $y_2[n]$ ,  $y_2[n + 2]$ ; (b)  $y_2[n]$ ,  $x_2[n]$ .

En efecto, si nos fijamos, por ejemplo, en el paso por 0 de las señales, se observa muy claramente que  $x_2[n]$  es el resultado de atrasar  $y_2[n]$  exactamente 10 muestras.

## 5.7. Ejemplo 7

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \quad (50)$$

$$x_2[n] = -1 - n - n^2 - n^3 \quad (51)$$

**Solución**

a) Se observa que  $x_1(t)$  no es sino el resultado de transformar la señal siguiente:

$$y_1(t) = \frac{1}{1 + e^t} \quad (52)$$

Concretamente, se observa que  $x_1(t)$  es el resultado de aplicarle a  $y_1(t)$ , **en el orden que se indica a continuación**, las cuatro transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la señal es adelantada 4 segs.):  $y_1(t + 4)$
2. Reflexión horizontal:  $y_1(-t + 4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3):  $3y_1(-t + 4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta  $\frac{1}{2}$  al *offset* de la señal):  $3y_1(-t + 4) - \frac{1}{2}$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = 3y_1(-t + 4) - \frac{1}{2} = 3 \left( \frac{1}{1 + e^{-(t+4)}} \right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} \quad (53)$$

**Como en el Ejemplo 6 (y como siempre, de hecho), el orden en el que se aplican las transformaciones es crucial:** no es lo mismo, por ejemplo, aplicar la reflexión horizontal primero y adelantarla después. En ese caso, se obtiene una señal diferente a  $x_1(t)$ :

1. Reflexión horizontal:  $y_1(-t)$
2. Desplazamiento horizontal (la señal se adelanta 4 segs.):  $y_1(-(t + 4)) = y_1(-t - 4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3):  $3y_1(-t - 4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta  $\frac{1}{2}$  al *offset* de la señal):  $3y_1(-t - 4) - \frac{1}{2}$

$$3y_1(-t - 4) - \frac{1}{2} = 3 \left( \frac{1}{1 + e^{-(t+4)}} \right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1 + e^{-t-4}} - \frac{1}{2} \neq x_1(t) \quad (54)$$

Si queremos obtener  $x_1(t)$  aplicando primero la reflexión horizontal, después tenemos que atrasar la señal (en lugar de adelantarla) 4 segundos:

1. Reflexión horizontal:  $y_1(-t)$
2. Desplazamiento horizontal (la señal **se atrasa** 4 segs.):  $y_1(-(t - 4)) = y_1(-t + 4)$
3. Escalado en amplitud (la señal es amplificada en un factor 3):  $3y_1(-t + 4)$
4. Desplazamiento vertical (se le resta  $\frac{1}{2}$  al *offset* de la señal):  $3y_1(-t + 4) - \frac{1}{2}$

$$3y_1(-t + 4) - \frac{1}{2} = \frac{3}{1 + e^{-t+4}} - \frac{1}{2} = x_1(t) \quad (55)$$

Y, ahora, respecto de la representación gráfica de las señales, repetimos la misma estrategia que en el Ejemplo 6 a fin de confirmar que nuestro planteamiento es correcto. Además, en la primera gráfica también representaremos la señal de la ecuación (54), para ilustrar cómo cambia la representación gráfica al cambiar el orden en que se aplican las transformaciones:

```
>> syms x1(t) y1(t);
>> x1(t) = 3/(1+exp(-t+4))-1/2;
>> y1(t) = 1/(1+exp(t));
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
```

```
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(3*y1(-t+4)-1/2, [-10 10]); % fplot de la señal de la ecuación (53)
>> fplot(3*y1(-t-4)-1/2, [-10 10]); % fplot de la señal de la ecuación (54)
>> axis([-10 10 -0.6 2.6]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a)');
>> legend('y_1(t)', '3y_1(-t+4)-1/2', '3y_1(-t-4)-1/2', 'Location', 'best');
>> subplot(2,1,2);
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.6 2.6]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(b)');
>> legend('y_1(t)', 'x_1(t)', 'Location', 'best');
```

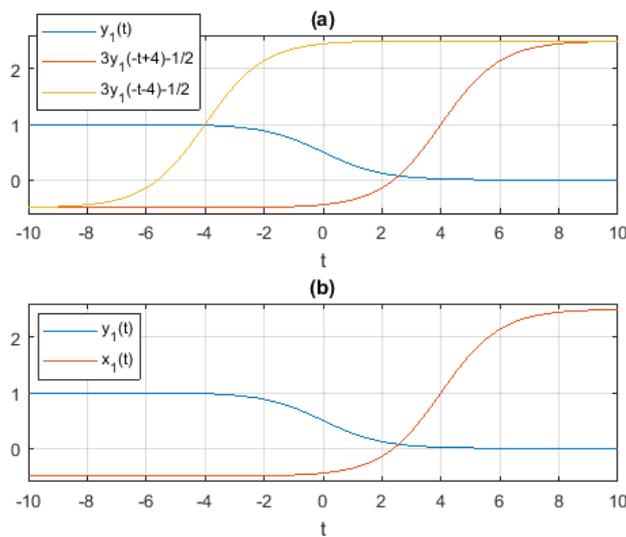


Figura 12. Representaciones gráficas: (a)  $y_1(t)$ ,  $3y_1(-t+4) - \frac{1}{2}$ ,  $3y_1(-t-4) - \frac{1}{2}$ ; (b)  $y_1(t)$ ,  $x_1(t)$ .

En efecto, se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que  $x_1(t) = 3y_1(-t+4) - \frac{1}{2}$ .

b) En el caso de  $x_2[n]$ , se observa lo siguiente:

$$x_2[n] = -1 - n - n^2 - n^3 = -1 + (-n) - (-n)^2 + (-n)^3 \quad (56)$$

Por tanto, vemos que  $x_2[n]$  no es sino el resultado de la reflexión horizontal de la siguiente señal:

$$y_2[n] = -1 + n - n^2 + n^3 \quad (57)$$

$$x_2[n] = y_2[-n] = -1 + (-n) - (-n)^2 + (-n)^3 = -1 - n - n^2 - n^3$$

Y, análogamente, volvemos a representar gráficamente los dos pares de señales:

```
>> n = -20:1:20;
>> x2 = -1-n-n.^2-n.^3;
>> y2 = -1+n-n.^2+n.^3;
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> stem(n,y2);
>> hold on;
```

```
>> stem(n,-1+(-n)-(-n).^2+(-n).^3);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(a)');
>> legend('y_2[n]', 'y_2[-n]', 'Location', 'best');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y2);
>> hold on;
>> stem(n,x2);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(b)');
>> legend('y_2[n]', 'x_2[n]', 'Location', 'best');
```

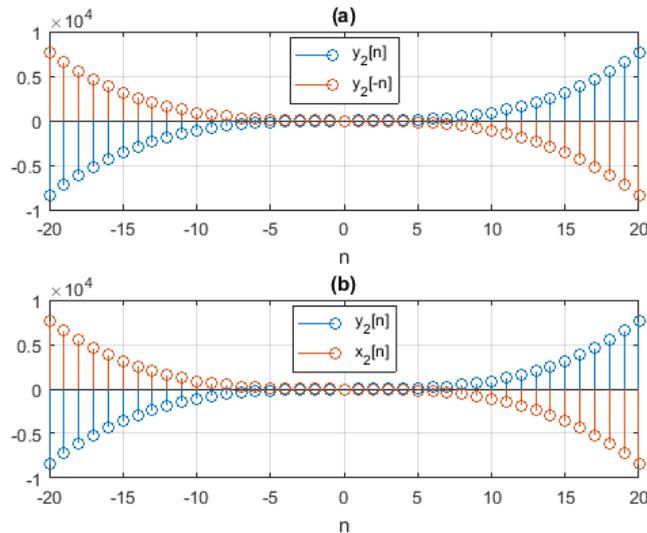


Figura 13. Representaciones gráficas: (a)  $y_2[n]$ ,  $y_2[-n]$ ; (b)  $y_2[n]$ ,  $x_2[n]$ .

En efecto, vemos que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que  $x_2[n] = y_2[-n]$ .

## 5.8. Ejemplo 8

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales analógicas:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2t+8}{3}}} \quad (58)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3/10 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para } t \geq 3/10 \end{cases} \quad (59)$$

### Solución

a) Se observa que  $x_1(t)$  es el resultado de transformar la señal:

$$y_1(t) = \frac{1}{1 + e^t} \quad (60)$$

En concreto, aplicándole las tres transformaciones siguientes:

1. Reflexión horizontal:  $y_1(-t)$
2. Expansión horizontal:  $y_1\left(-\left(\frac{2}{3}t\right)\right) = y_1\left(-\frac{2}{3}t\right)$
3. Desplazamiento horizontal (se adelanta 4 segs.):  $y_1\left(-\frac{2}{3}(t+4)\right) = y_1\left(-\frac{2}{3}t - \frac{8}{3}\right)$

Y, en efecto:

$$x_1(t) = y_1\left(-\frac{2}{3}t - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{1 + e^{\left(-\frac{2}{3}t - \frac{8}{3}\right)}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{2t+8}{3}}} \quad (61)$$

Como siempre, **el orden de aplicación de las transformaciones es muy importante**: la que hemos propuesto aquí no es la única secuencia posible de transformaciones que funcionaría en este caso. Se deja propuesto como ejercicio el buscar otras secuencias de transformaciones posibles y el comprobar que, efectivamente, también funcionan.

Como en el Ejemplo 6 y el Ejemplo 7, representaremos gráficamente los dos pares de señales para comprobar si nuestro planteamiento es correcto:

```
>> syms x1(t) y1(t);
>> x1(t) = 1/(1+exp(-(2*t+8)/3));
>> y1(t) = 1/(1+exp(t));
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(y1(-2*t/3-8/3), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a)');
>> legend('y_1(t)', 'y_1(-2t/3-8/3)', 'Location', 'best');
>> subplot(2,1,2);
>> fplot(y1(t), [-10 10]);
>> hold on;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(b)');
>> legend('y_1(t)', 'x_1(t)', 'Location', 'best');
```

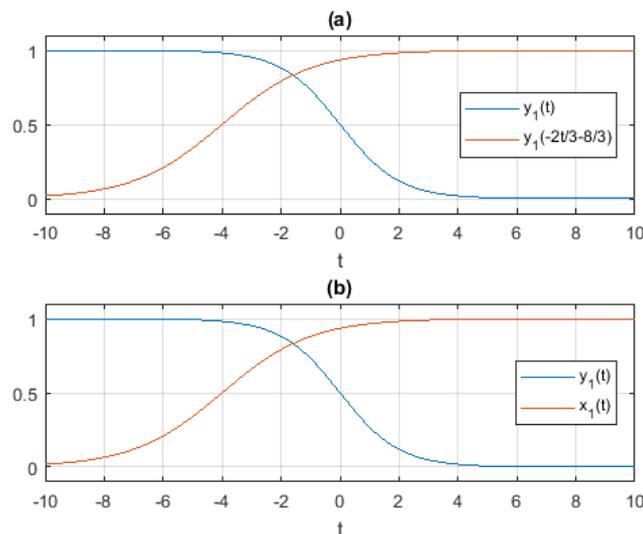


Figura 14. Representaciones gráficas de señales: (a)  $y_1(t)$ ,  $y_1\left(-\frac{2}{3}t - \frac{8}{3}\right)$ ; (b)  $y_1(t)$ ,  $x_1(t)$ .

En efecto, se observa que las señales representadas en rojo en ambas gráficas son exactamente iguales, lo cual nos confirma que  $x_1(t) = y_1\left(-\frac{2}{3}t - \frac{8}{3}\right)$ . Y además, también se observa, en cualquiera de las dos gráficas, que la señal roja es el resultado de aplicarle una reflexión horizontal a la señal azul, luego expandirla horizontalmente, y luego adelantarla 4 segundos.

b) En general, puede suceder que, dependiendo de qué señal origen se escoja, haya que aplicar más o menos transformaciones para obtener la señal deseada. El caso de  $x_2(t)$  es un buen ejemplo de ello. Aquí vamos a escoger la siguiente señal origen:

$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (62)$$

Así,  $x_2(t)$  es el resultado de aplicarle a  $y_2(t)$  las dos transformaciones siguientes:

1. Desplazamiento horizontal (la atrasamos 3 segs.):  $y_2(t - 3)$
2. Compresión horizontal:  $y_2((10t) - 3) = y_2(10t - 3)$

Y, en efecto:

$$x_2(t) = y_2(10t - 3) = \begin{cases} 0 & \text{para } (10t - 3) < 0 \\ 1 - e^{-(10t-3)} & \text{para } (10t - 3) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } 10t < 3 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para } 10t \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 3/10 \\ 1 - e^{-10t+3} & \text{para } t \geq 3/10 \end{cases} \quad (63)$$

Conviene notar que, **al aplicar transformaciones de la variable independiente en señales definidas por intervalos, las transformaciones afectan tanto a las expresiones de las señales correspondientes a cada intervalo como a las definiciones de los intervalos mismos.**

Se deja propuesto como ejercicio el plantear qué otras secuencias de transformaciones habría que aplicar para obtener  $x_2(t)$  a partir de otras señales origen diferentes a  $y_2(t)$ , tales como, por ejemplo:

$$y_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^t & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (64)$$

Así pues, comprobamos los resultados representando las gráficas como en el apartado anterior:

```
>> syms x2(t) y2(t);
>> x2(t) = piecewise(t<3/10,0,t>=3/10,1-exp(-10*t+3));
>> y2(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1-exp(-t));
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(y2(t),[-2 4]);
>> hold on;
>> fplot(y2(10*t-3),[-2 4]);
>> axis([-2 4 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('a');
>> legend('y_2(t)', 'y_2(10t-3)', 'Location', 'northwest');
>> subplot(2,1,2);
>> fplot(y2(t),[-2 4]);
>> hold on;
>> fplot(x2(t),[-2 4]);
>> axis([-2 4 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('b');
>> legend('y_2(t)', 'x_2(t)', 'Location', 'northwest');
```

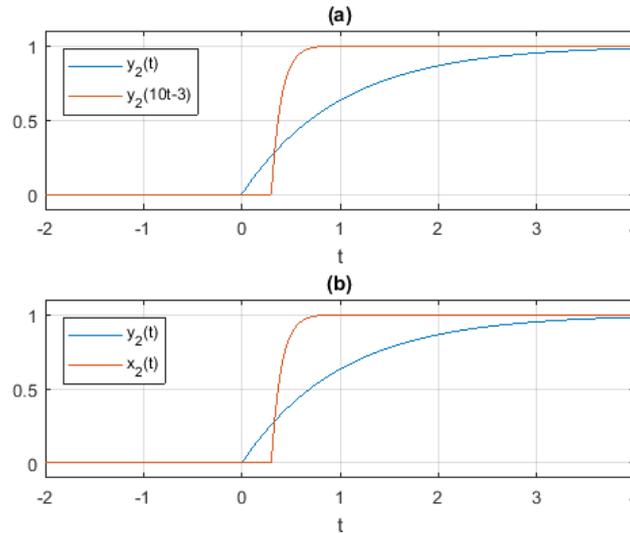


Figura 15. Representaciones gráficas de señales: (a)  $y_2(t)$ ,  $y_2(10t - 3)$ ; (b)  $y_2(t)$ ,  $x_2(t)$ .

Se observa que, efectivamente,  $x_2(t) = y_2(10t - 3)$ : al empezar atrasando  $y_2(t)$  3 segundos, la frontera entre los dos intervalos se mueve de  $t = 0$  a  $t = 3$ ; pero, al aplicar después la compresión horizontal en factor 10, vuelve a moverse de  $t = 3$  a  $t = 3/10$ , que es donde está la frontera entre intervalos en la definición de  $x_2(t)$ .

## 5.9. Ejemplo 9

### Enunciado

Se tiene la siguiente señal digital definida mediante una función trigonométrica:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (65)$$

Se pide hallar las expresiones de las siguientes señales y representarlas todas gráficamente:

$$y_1[n] = x[2n] \quad (66)$$

$$y_2[n] = x[4n] \quad (67)$$

$$y_3[n] = x[n/2] \quad (68)$$

$$y_4[n] = x[2n/3] \quad (69)$$

### Solución

En primer lugar, hallamos las expresiones de las señales  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$  e  $y_4[n]$ , aplicando para ello las nociones de diezmo y de inserción de ceros, según corresponda en cada caso.

En el caso de  $y_1[n]$ , vemos que es el resultado de diezmar  $x[n]$  en factor 2:

$$y_1[n] = x[2n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n)\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n \quad (70)$$

En lo referente a  $y_2[n]$ , se define a partir del diezmo de  $x[n]$  en factor 4:

$$y_2[n] = x[4n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}(4n)\right) = \cos(2\pi n) = 1 \quad (71)$$

Por el contrario,  $y_3[n]$  es la expansión horizontal en factor 2 de  $x[n]$ , lo que requiere de inserir 1 cero entre cada par de muestras consecutivas de  $x[n]$ :

$$y_3[n] = x[n/2] = \begin{cases} x[n/2] & \text{para } n \in \{2m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } n \notin \{2m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\right) & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & \text{si } n \text{ par} \\ 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \quad (72)$$

Finalmente,  $y_4[n]$  es el resultado de diezmar  $x[n]$  en factor 2 y expandirla horizontalmente en factor 3 (inserción de bloques de 2 ceros entre cada par de muestras consecutivas de  $x[2n]$ ):

$$y_4[n] = x[2n/3] = \begin{cases} x[2n/3] & \text{para } n \in \{3m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } n \notin \{3m_i\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n}{3}\right)\right) & \text{si } n \text{ múltiplo de 3} \\ 0 & \text{si } n \text{ no múltiplo de 3} \end{cases} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) & \text{si } n \text{ múltiplo de 3} \\ 0 & \text{si } n \text{ no múltiplo de 3} \end{cases} \quad (73)$$

Y, ahora, representamos gráficamente  $x[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$  e  $y_4[n]$  (ver Figura 16):

```
>> n = -20:1:20;
>> x = cos((pi./2).*n); % Definición de x[n]
>> y1 = cos(pi.*n); % Definición de y1[n]
>> y2 = cos(2.*pi.*n); % Definición de y2[n]
>> y3 = cos((pi./4).*n); % De entrada, y3[n]=cos((pi/4)n) para -20<=n<=20
>> y3(rem(n,2)~=0) = 0; % Y ahora ponemos a 0 las muestras impares de y3
>> y4 = cos((pi./3).*n); % De entrada, y4[n]=cos((pi/3)n) para -20<=n<=20
>> y4(rem(n,3)~=0) = 0; % Ponemos a 0 las muestras no múltiplos de 3 de y4
>> figure;
>> subplot(5,1,1);
>> stem(n,x); % Representación gráfica de x[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.2 1.2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(a) x[n] = cos[(\pi/2)n]');
>> subplot(5,1,2);
>> stem(n,y1); % Representación gráfica de y1[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.2 1.2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(b) y_1[n] = x[2n] = cos[\pin]');
>> subplot(5,1,3);
>> stem(n,y2); % Representación gráfica de y2[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.2 1.2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(c) y_2[n] = x[4n] = cos[2\pi/n]');
>> subplot(5,1,4);
>> stem(n,y3); % Representación gráfica de y3[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.2 1.2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(d) y_3[n] = x[n/2] = \cos[(\pi/2)n] si n par , 0 si n impar\');
>> subplot(5,1,5);
>> stem(n,y4); % Representación gráfica de y4[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.2 1.2]);
>> grid on;
```

```
>> xlabel('n');
>> title('(e) y_4[n] = x[2n/3] = \{\cos((\pi/3)n) si n 3x , 0 si n no 3x\}');
```

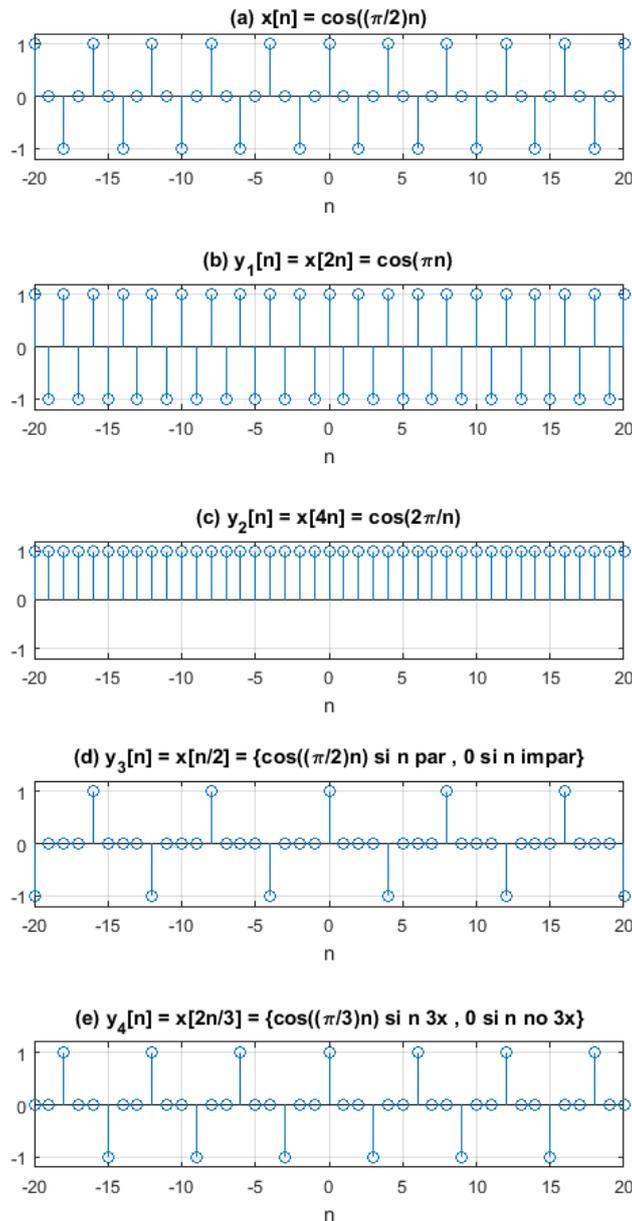


Figura 16. Representación gráfica de  $x[n]$ ,  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ ,  $y_3[n]$  e  $y_4[n]$ .

Conviene notar el uso de la función `rem` en las definiciones de  $y_3$  e  $y_4$ . El comando `rem(a,b)` retorna el resto de la división entera  $a/b$ . Así, `rem(n,2)` retorna los restos de las divisiones enteras de cada una de las muestras de  $n$  entre 2 ( $n./2$ ). Luego, `rem(n,2)~=0` retorna cuáles de cada uno de esos restos son diferentes de 0; es decir, retorna las posiciones de las muestras impares del array  $n$  (si quisiésemos las posiciones de las muestras pares del array  $n$  deberíamos hacer `rem(n,2)==0`). Por tanto, `y3(rem(n,2)~=0) = 0` pone a cero las muestras impares de  $y_3$ . Y, análogamente, `y4(rem(n,3)~=0) = 0` pone a cero las muestras no múltiplos de 3 de  $y_4$ .

Si nos fijamos en la Figura 16, se observa lo siguiente:

- La señal  $x[n]$  es una señal periódica a razón de 4 muestras por periodo, tal que sus muestras dan lugar a la secuencia  $[\dots 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots]$ .

- La señal  $y_1[n]$  es una señal periódica a razón de 2 muestras por periodo, tal que  $[\dots 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ \dots]$ . Por tanto, vemos que es correcto que  $\cos(\pi n) = (-1)^n$ , tal y como se expresa en la ecuación (70).
- La señal  $y_2[n]$  es la señal constante  $[\dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots]$ . Por tanto, vemos que es correcto que  $\cos(2\pi n) = 1$ , tal y como se expresa en la ecuación (71).
- La señal  $y_3[n]$  es una señal periódica a razón de 8 muestras por periodo, tal que  $[\dots 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$ .
- La señal  $y_4[n]$  es una señal periódica a razón de 6 muestras por periodo, tal que  $[\dots 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ \dots]$ .

## 5.10. Ejemplo 10

### Enunciado

Se pide calcular el máximo, el mínimo, el supremo y el ínfimo de las señales siguientes:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad (74)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \quad (75)$$

$$x_3[n] = e^{-\frac{1}{100}n^2} \quad (76)$$

### Solución

a) Empezamos con  $x_1(t)$ . Para calcular estos parámetros, acostumbra a ser de gran utilidad empezar representando gráficamente la señal:

```
>> syms x1(t);
>> x1(t) = 1/(1+exp(-t));
>> figure;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]); % Cambiamos los límites de los ejes de la gráfica
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('x_1(t) = 1/(1+e^{-t})', 'Location', 'best');
```

Con la función `axis`, modificamos los límites de los ejes de la gráfica para visualizar mejor las asíntotas horizontales que presenta la señal (hemos cambiado solo los verticales  $-0.1$  y  $1.1$ , ya que los horizontales los hemos dejado en  $-10$  y  $10$ ). Para más detalles, ver el `help` de la función.

Se observa que  $x_1(t)$  es una señal con forma de sigmoide, lo cual implica que tiende asintóticamente a 0 para valores muy negativos de  $t$ , y que tiende asintóticamente a 1 para valores muy positivos de  $t$ :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0 \quad (77)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

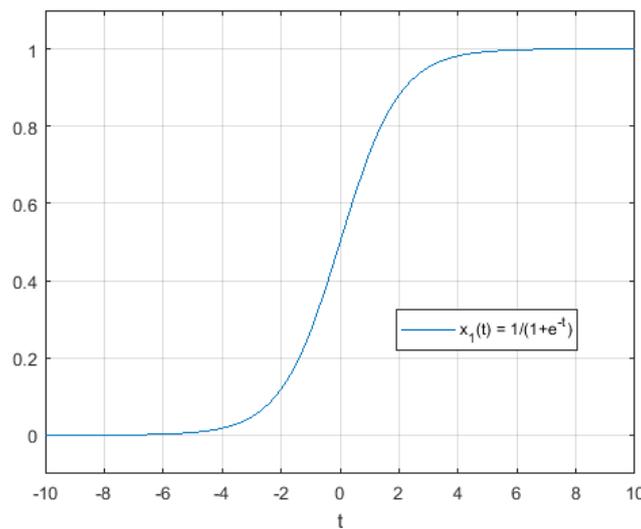


Figura 17. Representación gráfica de  $x_1(t)$ .

Podemos comprobar estos resultados con MATLAB usando la función `limit`, que permite calcular límites de funciones y sucesiones numéricas definidas simbólicamente (el comando `Inf` está reservado en MATLAB para simbolizar el  $\infty$ ):

```
>> limit(x1(t),t,-Inf)
ans =
0
>> limit(x1(t),t,+Inf)
ans =
1
```

Por tanto, hemos podido comprobar que la señal  $x_1(t)$  está acotada en amplitud entre 0 y 1, pero que nunca alcanza esas cotas, puesto que tiene asintóticamente hacia ambas. De este modo, concluimos que  $x_1(t)$  sí tiene supremo e ínfimo (sus menores cotas superior e inferior, respectivamente; o sea, sus asíntotas horizontales), pero no tiene máximo ni mínimo:

$$\begin{aligned}
 S_{x_1} &= 1 \\
 \nexists \max(x_1(t)) \\
 I_{x_1} &= 0 \\
 \nexists \min(x_1(t))
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

Finalmente, podemos representar gráficamente el supremo y el ínfimo de  $x_1(t)$  añadiéndolos a la gráfica de la señal. Los representaremos como líneas punteadas en rojo, que podemos dibujar fácilmente mediante la función `plot`, que permite dibujar gráficas discretas uniendo los puntos mediante rectas:

```
>> hold on;
>> plot([-10 10],[1 1],'r:'); % Representamos el supremo
>> plot([-10 10],[0 0],'r:'); % Representamos el ínfimo
>> legend('x_1(t) = 1/(1+e^{-t})','Location','best'); % Rehacemos la leyenda
```

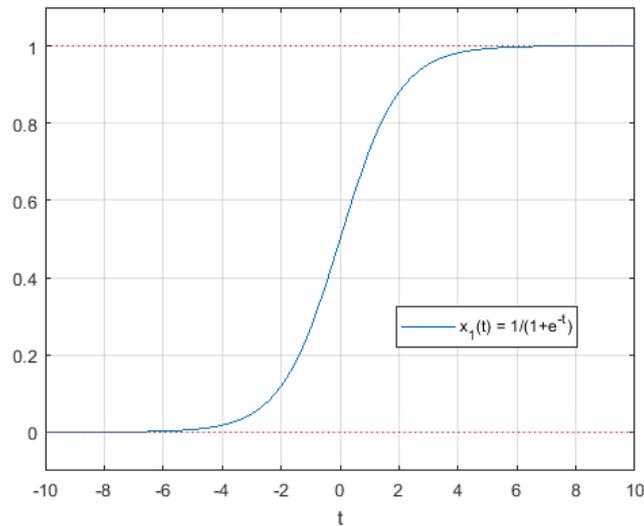


Figura 18. Representación gráfica de  $x_1(t)$ , su supremo y su ínfimo.

Así, para representar el supremo, basta con indicarle dos puntos a la función `plot`: dos valores de abscisas (los de los límites horizontales de la gráfica), dos valores de ordenadas (ambos iguales al valor del supremo) e indicarle que ha de unir estos dos puntos mediante una recta punteada de color rojo. Y lo mismo para representar el ínfimo. Para más detalles, ver el `help` de la función.

b) Representamos gráficamente  $x_2(t)$ :

```
>> syms x2(t);
>> x2(t) = (1/4)*t^4-(1/2)*t^2;
>> figure;
>> fplot(x2(t), [-2 2]);
>> axis([-2 2 -0.5 2]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('x_2(t) = (1/4)t^4-(1/2)t^2', 'Location', 'best');
```

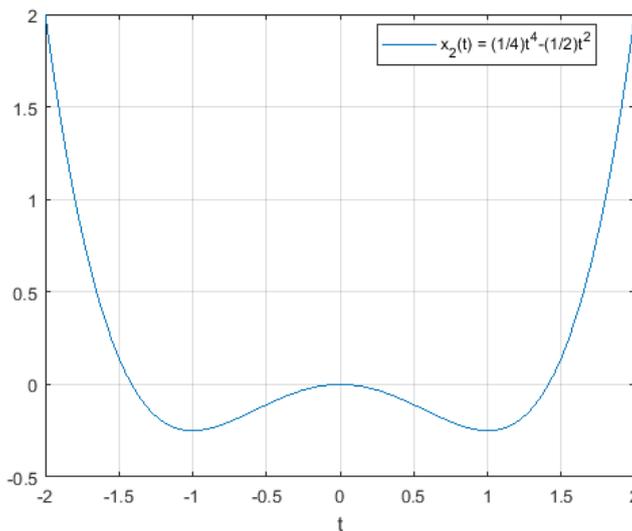


Figura 19. Representación gráfica de  $x_2(t)$ .

Se observa que  $x_2(t)$  crece sin parar tanto para valores muy negativos como muy positivos de  $t$ :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow -\infty} t^4 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 = +\infty$$
(79)

Y la comprobación:

```
>> limit(x2(t), t, -Inf)
ans =
Inf
>> limit(x2(t), t, +Inf)
ans =
Inf
```

Esto ya nos indica que  $x_2(t)$  **no está acotada superiormente, de modo que su supremo no existe y, por tanto, tampoco su máximo:**

$$\nexists S_{x_2}$$

$$\nexists \max(x_2(t))$$
(80)

Y en lo referente a su ínfimo y su mínimo, en la Figura 19 se observa que  $x_2(t)$  sí está acotada inferiormente, de modo que **su ínfimo existe**. Además, también se observa que alcanza su ínfimo en dos puntos distintos, de modo que **el mínimo de  $x_2(t)$  también existe**. Para averiguar cuáles son estos puntos y obtener así el valor del ínfimo (y, de hecho, también del mínimo, puesto que hemos visto que el mínimo existe y sabemos que, si el mínimo existe, es igual al ínfimo), hemos de hallar los puntos críticos de  $x_2(t)$ , o sea, aquellos valores de  $t$  en los que la derivada de  $x_2(t)$  se anula. Ya se observa en la Figura 19 que  $x_2(t)$  tiene tres puntos críticos: dos mínimos absolutos y un máximo local en  $t = 0$  (que no hay que confundir, desde luego, con su valor máximo, que, como hemos visto, no existe).

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right)}{dt} = t^3 - t$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \Rightarrow t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \\ t_3 = -1 \end{cases}$$
(81)

Podemos comprobar estos resultados con MATLAB usando **la función `diff`, que permite calcular la derivada de funciones definidas simbólicamente**, y **la función `solve`, que permite resolver simbólicamente ecuaciones algebraicas**. Guardaremos la derivada de  $x_2(t)$  en la variable `dx2(t)` y, puesto que la función `solve` retorna directamente los puntos críticos, los almacenaremos en la variable `pc` para luego poder obtener fácilmente el valor del ínfimo y el mínimo de  $x_2(t)$ :

```
>> dx2(t) = diff(x2(t), t)
dx2(t) =
t^3 - t
>> pc = solve(dx2(t), t)
pc =
```

-1  
0  
1

Se corrobora, pues, que los cálculos de la ecuación (81) son correctos. Corroboramos también que el máximo local que presenta  $x_2(t)$  está en  $t = 0$  (uno de los tres puntos críticos hallados).

Ahora, evaluando  $x_2(t)$  en cualquiera de los otros dos puntos críticos (lo haremos para  $t = 1$ ), obtendremos los valores de su ínfimo y su mínimo, que, obviamente, son el mismo (puesto que, si el mínimo existe, también existe el ínfimo y ambos coinciden):

$$I_{x_2} = \min(x_2(t)) = x_2(1) = \frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{2}1^2 = -\frac{1}{4} \quad (82)$$

También podemos comprobar fácilmente este cálculo en MATLAB, evaluando  $x_2(t)$  en  $t=1$ :

```
>> x2(1)
ans =
-1/4
```

Se corrobora, pues, que los cálculos de la ecuación (82) son correctos. De hecho, es también posible evaluar  $x_2(t)$  en todos los valores almacenados en la variable `pc` de una única tacada:

```
>> x2(pc)
ans =
-1/4
0
-1/4
```

Finalmente, añadimos el ínfimo y el mínimo de  $x_2(t)$  a la representación gráfica de la señal. Indicaremos los puntos en los que la señal alcanza su valor mínimo mediante líneas verticales punteadas en rojo que vayan desde el suelo de la gráfica hasta la altura de valor mínimo (que es la del ínfimo, como sabemos):

```
>> hold on;
>> plot([-2 2], [-1/4 -1/4], 'r:'); % Representamos el ínfimo
>> plot([-1 -1], [-0.5 -1/4], 'r:'); % Representamos el primer punto mínimo
>> plot([1 1], [-0.5 -1/4], 'r:'); % Representamos el segundo punto mínimo
>> legend('x_2(t) = (1/4)t^4 - (1/2)t^2', 'Location', 'best');
```

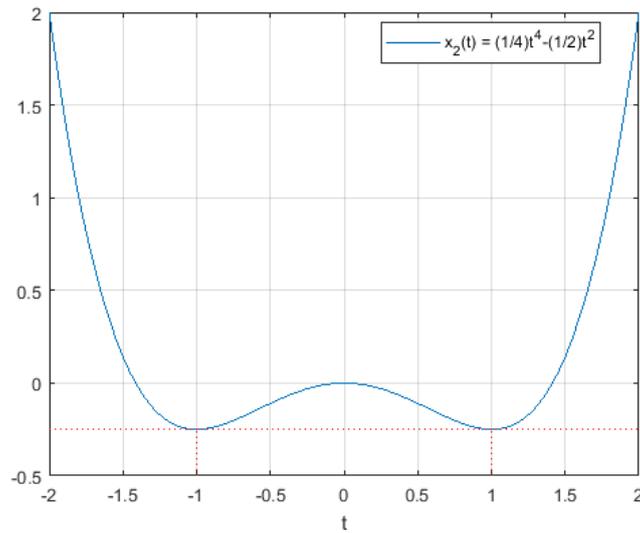


Figura 20. Representación gráfica de  $x_2(t)$ , su ínfimo y los puntos en los que alcanza su mínimo.

c) Representamos gráficamente  $x_3[n]$ :

```
>> n = -30:1:30;
>> x3 = exp(-(1./100).*n.^2);
>> figure;
>> stem(n,x3);
>> axis([-30 30 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_3[n] = e^{-(1/100)n^2}', 'Location', 'best');
```

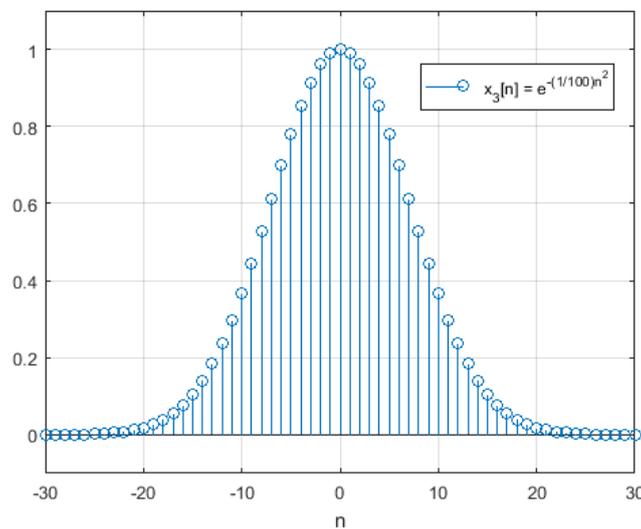


Figura 21. Representación gráfica de  $x_3[n]$ .

Se observa que  $x_3[n]$  es una señal con forma de campana de Gauss discretizada, lo cual implica que tiende asintóticamente a 0 para valores muy negativos y muy positivos de  $n$ , y que presenta un máximo absoluto de valor 1 para  $n = 0$ .

Por tanto,  $x_3[n]$  está acotada en amplitud entre 0 y 1, de modo que sí tiene supremo e ínfimo. Además, mientras que sí alcanza su supremo, de modo que sí tiene máximo, nunca alcanza su ínfimo, puesto que tiene asintóticamente hacia él, de modo que no tiene mínimo.

Empezaremos calculando su ínfimo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_3[n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{-\frac{1}{100}n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^{\frac{1}{100}n^2}} \right) = 0 \quad (83)$$

Podemos comprobar este resultado con MATLAB usando la función `limit` para calcular el límite de la sucesión  $\exp(-(1/100)*m^2)$ , que definiremos simbólicamente como una función de variable entera (usaremos la variable `m` para no machacar la variable `n` que hemos creado para definir y representar `x3`). **Usamos `syms` para definir `m` como variable** (en este caso, **variable entera**, cosa que hay que especificar) y luego calculamos directamente el límite de la sucesión:

```
>> syms m integer;
>> limit(exp(-(1/100)*m^2), m, +Inf)

ans =

0
```

Y respecto de su supremo, podemos calcular directamente con MATLAB el valor máximo de `x3` mediante **la función `max`, que retorna el valor máximo de un array numérico**. En general, **las funciones `max` y `min` son de gran utilidad para calcular directamente los valores máximo y mínimo (y, por tanto, también el supremo y el ínfimo) de una señal digital**:

```
>> max(x3)

ans =

1
```

Y podemos comprobar también que, efectivamente, el máximo está situado en  $n = 0$ . Lo haremos construyendo y ejecutando un único comando: usamos el operador doble igualdad (`==`) para comparar todas las muestras del array `x3` con su valor máximo (`x3==max(x3)`), la función `find` para que nos retorne el índice de la posición de `x3` en la que se encuentra su valor máximo (`find(x3==max(x3))`) y poder indexar con él la variable `n` y obtener, así, el valor de `n` en el que está situado el máximo (`n(find(x3==max(x3)))`):

```
>> n(find(x3==max(x3)))

ans =

0
```

Por lo tanto, ya podemos concluir que:

$$S_{x_3} = \max(x_3[n]) = x_3[0] = e^{-\frac{1}{100}0^2} = e^0 = 1$$

$$I_{x_3} = 0 \quad (84)$$

$$\nexists \min(x_3[n])$$

Y ahora añadimos el supremo, el máximo y el ínfimo de  $x_3[n]$  a la representación gráfica de la señal. Para indicar el punto máximo haremos lo mismo que hicimos en el apartado anterior con el mínimo, solo que lo mediante una línea vertical punteada en rojo que vaya desde el techo de la gráfica hasta la altura de valor máximo:

```
>> hold on;
>> plot([-30 30],[1 1], 'r:'); % Representamos el supremo
```

```
>> plot([0 0],[1.1 1], 'r:'); % Representamos el máximo
>> plot([-30 30],[0 0], 'r:'); % Representamos el ínfimo
>> legend('x_3[n] = e^{-(1/100)n^2}', 'Location', 'best');
```

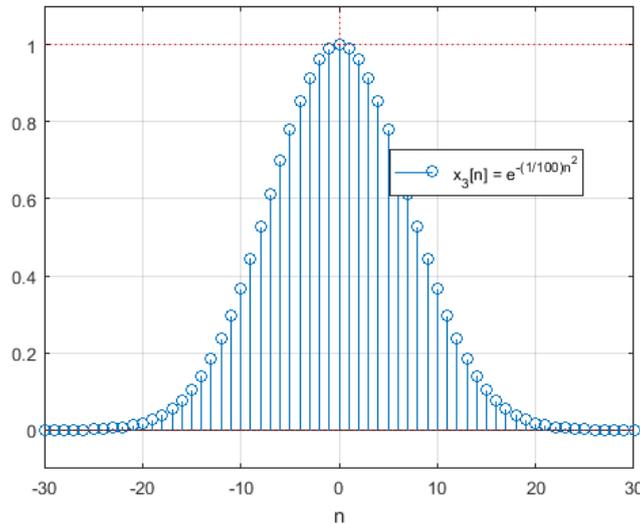


Figura 22. Representación gráfica de  $x_3[n]$ , su supremo, su máximo y su ínfimo.

Para acabar el ejercicio, se recomienda consultar el `help` de las funciones `plot`, `syms`, `limit`, `diff`, `solve`, `max`, `min` y `find` para entender mejor qué hacen, cómo funcionan y qué otras posibilidades ofrecen.

### 5.11. Ejemplo 11

#### Enunciado

Se tienen las siguientes señales:

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \tag{85}$$

$$x_2[n] = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \tag{86}$$

$$x_3[n] = 1 + 2n \tag{87}$$

$$x_4[n] = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ (1/2)^n & \text{para } n \geq 0 \end{cases} \tag{88}$$

Se pide calcular, para cada una de ellas, los siguientes parámetros:

- Su *offset*.
- Su *offset* en  $t \in [0,2]$ , si la señal es analógica.
- Su *offset* en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ , si la señal es digital.

#### Solución

a) Vemos que  $x_1(t)$  es la señal sigmoide de la Figura 16 en el Ejemplo 10. Solo con observar la gráfica ya puede intuirse que el *offset* de esta señal será igual a  $\frac{1}{2}$ , pues está centrada en ese valor de amplitud. Y, luego, el valor de su *offset* en  $t \in [0,2]$  habrá de estar comprendido entre  $\frac{1}{2}$  y 1.

En todo caso, calculamos el *offset* de  $x_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_1(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left( \frac{1}{1+e^{-t}} \right) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left( \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{[\ln(1+e^t)]_{-T}^T}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^T) - \ln(1+e^{-T})}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1+e^T}{1+e^{-T}}\right)}{2T} = \quad (89) \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(e^T \frac{1+e^{-T}}{1+e^{-T}}\right)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^T)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Y ahora calculamos el *offset* de  $x_1(t)$  en  $t \in [0,2]$ :

$$\begin{aligned} \mu_{10}^2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x_1(t) dt = \frac{1}{2 - 0} \int_0^2 \left( \frac{1}{1+e^{-t}} \right) dt = \frac{1}{2} [\ln(1+e^t)]_0^2 = \\ & \frac{1}{2} (\ln(1+e^2) - \ln(1+e^0)) = \ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right) \cong 0.7169 \quad (90) \end{aligned}$$

Comprobamos ambos resultados con MATLAB, usando la función `int`, que permite calcular la integral de funciones definidas simbólicamente, y la función `limit`, que ya conocemos:

```
>> syms x1(t) T;
>> x1(t) = 1/(1+exp(-t));
>> limit((1/(2*T))*int(x1(t),t,-T,T),T,+Inf)

ans =

1/2

>> (1/2)*int(x1(t),t,0,2)

ans =

log(exp(2)/2 + 1/2)/2

>> log(exp(2)/2 + 1/2)/2

ans =

0.7169
```

En general, `int(x(t),t)` calcula la función primitiva resultante de la integral indefinida de  $x(t)$  en  $t$ . Si, como hemos hecho aquí, establecemos unos límites de integración, `int(x(t),t,a,b)` calcula la expresión resultante de integral definida de  $x(t)$  en  $t$  entre  $a$  y  $b$ . Podemos ejecutar a continuación un comando que sea justamente esa expresión (como hemos hecho aquí) y MATLAB calcula y retorna su resultado numérico; en nuestro caso, esto nos sirve para comprobar que el resultado obtenido en la ecuación (90) es correcto. Se recomienda consultar el `help` de la función `int`, dada su gran utilidad.

Para finalizar, representamos gráficamente  $x_1(t)$  y le añadimos a la gráfica el nivel de su *offset*, que representaremos, como ya hemos hecho antes con el supremo y el ínfimo, mediante una línea horizontal punteada en rojo:

```
>> syms x1(t);
>> x1(t) = 1/(1+exp(-t));
```

```
>> figure;
>> hold on;
>> fplot(x1(t), [-10 10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> plot([-10 10], [1/2 1/2], 'r:'); % Representamos el offset
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('x_1(t) = 1/(1+e^{-t})', 'Location', 'best');
```

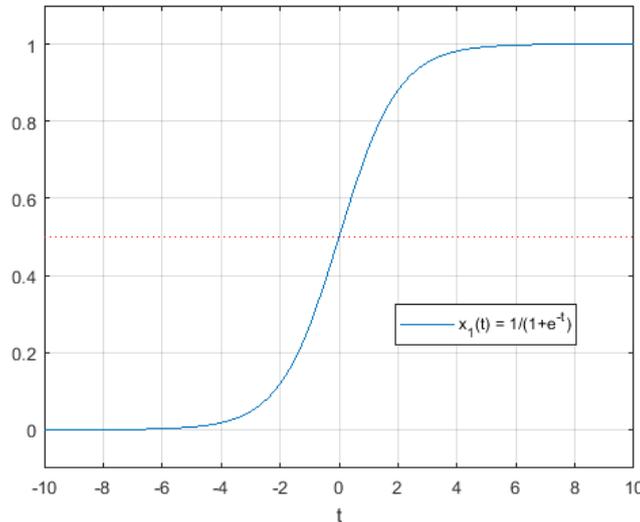


Figura 23. Representación gráfica de  $x_1(t)$  y su nivel de *offset*.

b) Vemos que  $x_2[n]$  es una versión digitalizada (muestreada, de hecho, a razón de  $T_m = 1$ ) de la señal analógica polinómica de la Figura 18 en el Ejemplo 10. Si observamos su representación gráfica, ya se intuye que su *offset* tenderá a  $+\infty$ , puesto que la señal crece indefinidamente tanto para valores muy positivos como muy negativos de la variable independiente:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{2} n^2 \right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{1}{4} \sum_{n=-N}^N n^4 - \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N n^2 \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n^4 - \sum_{n=1}^N n^2 \right) \end{aligned} \quad (91)$$

Al llegar a este punto, se observa que  $\sum_{n=1}^N n^4$  y  $\sum_{n=1}^N n^2$  son **sumatorios de potencias**.

Por tanto, puesto que estamos en un límite para  $N \rightarrow \infty$ , aplicamos los términos dominantes de  $\sum_{n=1}^N n^4$  y  $\sum_{n=1}^N n^2$  para completar el cálculo del *offset* de  $x_2[n]$  ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes cuyos valores son irrelevantes):

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n^4 - \sum_{n=1}^N n^2 \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{1}{2} \alpha_1 N^5 - \alpha_2 N^3 \right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha_1}{2} N^5 - \alpha_2 N^3}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha_1}{2} N^5}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1}{4} N^4 \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (92)$$

Y por otra parte, observando la representación gráfica de  $x_2[n]$ , también se intuye claramente que su *offset* en  $n \in \{0, \dots, 99\}$  será un valor muy elevado, pero finito:

$$\begin{aligned} \mu_{20}^{99} &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x_2[n] = \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{99} \left( \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{2} n^2 \right) = \\ &= \frac{1}{100} \left( \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^{99} n^4 + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{99} n^2 + 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{100} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{99^5}{5} + \frac{99^4}{2} + \frac{99^3}{3} - \frac{99}{30} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{99^3}{3} + \frac{99^2}{2} + \frac{99}{6} + 1 \right) \right) = \quad (93) \\ &= \frac{1}{100} \left( \frac{99^5}{20} + \frac{99^4}{8} + \frac{99^3}{12} - \frac{99}{120} + \frac{1}{4} - \frac{99^3}{6} - \frac{99^2}{4} - \frac{99}{12} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{100} \left( \frac{99^5}{20} + \frac{99^4}{8} - \frac{99^3}{12} - \frac{99^2}{4} - \frac{1089}{120} - \frac{1}{4} \right) \cong 4.87 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Comprobamos ahora mediante MATLAB que los resultados obtenidos sean correctos. Para el cálculo de  $\mu_2$ , usaremos **la función `symsum`, que permite calcular series numéricas (tanto finitas como infinitas) definidas simbólicamente:**

```
>> syms m N integer;
>> symsum((1/4)*m^4-(1/2)*m^2,m,-N,N) % Comprobamos el cálculo de la serie

ans =

N^5/10 + N^4/4 - N^3/6 - N^2/2 - (11*N)/60

>> limit((1/(2*N+1))*symsum((1/4)*m^4-(1/2)*m^2,m,-N,N),N,+Inf) % Calculamos
todo el límite de una sola tacada ejecutando un único comando

ans =

Inf
```

Para el cálculo de  $\mu_{20}^{99}$ , obviamente también podríamos usar la función `symsum`. Sin embargo, puesto que sí podemos definir explícitamente el intervalo finito de  $x_2[n]$  en  $n \in \{n_1, \dots, n_2\}$ , calcularemos su *offset* numéricamente. Este cálculo podemos hacerlo de dos formas distintas, ambas totalmente equivalentes: o bien usando **la función `mean`, que calcula el promedio de todos los valores contenidos en un array;** o bien usando **la función `sum`, que calcula la suma de todos los valores contenidos en un array,** y dividiendo el resultado de la suma entre el número de muestras usando **la función `length`, que retorna el número de muestras de un array.**

```
>> n = 0:1:99;
>> x2 = (1./4).*n.^4-(1./2).*n.^2;
>> mean(x2)

ans =

4.8742e+06

>> sum(x2)/length(x2)

ans =

4.8742e+06
```

Se recomienda consultar el `help` de las funciones `symsum`, `sum`, `length` y `mean`, dada su utilidad.

c) Vemos que  $x_3[n]$  es la señal representada gráficamente en color azul en la figura del Ejemplo 2. Si observamos su representación gráfica, ya se intuye que su *offset* será igual a 1, puesto que se trata de una recta discretizada cuya ordenada en el origen es 1:

$$\mu_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (1+2n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \sum_{n=-N}^N 1 + \sum_{n=-N}^N 2n \right) \quad (94)$$

Al llegar a este punto, se observa que  $\sum_{n=-N}^N 1$  y  $\sum_{n=-N}^N 2n$  son dos series aritméticas de diferencias 0 y 2, respectivamente.

Por tanto, ya sabemos cómo calcular  $\sum_{n=-N}^N 1$  y  $\sum_{n=-N}^N 2n$ :

$$\sum_{n=-N}^N 1 = \frac{N - (-N) + 1}{2} (1 + 1) = 2N + 1 \quad (95)$$

$$\sum_{n=-N}^N 2n = \frac{N - (-N) + 1}{2} (-2N + 2N) = 0 \quad (96)$$

Así, retomando la ecuación (94) y aplicando los resultados obtenidos en (95) y (96), ya podemos completar el cálculo de  $\mu_3$ :

$$\mu_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \sum_{n=-N}^N 1 + \sum_{n=-N}^N 2n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} (2N+1) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (97)$$

Y respecto al *offset* de  $x_3[n]$  en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ :

$$\begin{aligned} \mu_{30}^{99} &= \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{99} (1+2n) = \frac{1}{100} \left( \sum_{n=0}^{99} 1 + \sum_{n=0}^{99} 2n \right) = \\ &= \frac{1}{100} \left( \frac{100}{2} (1+1) + \frac{100}{2} (0+198) \right) = 1 + \frac{198}{2} = 100 \end{aligned} \quad (98)$$

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> syms m N integer;
>> symsum(1+2*m, m, -N, N)

ans =

2*N + 1

>> limit((1/(2*N+1))*symsum((1/4)*m^4-(1/2)*m^2, m, -N, N), N, +Inf)

ans =

1

>> n = 0:1:99;
>> x3 = 1+2.*n;
>> mean(x3)

ans =

100
```

Y para finalizar, representamos gráficamente  $x_3[n]$ , indicando en la gráfica su nivel de *offset*:

```
>> n = -10:1:10;
>> x3 = 1+2.*n;
>> figure;
>> stem(n,x3);
>> hold on;
>> plot([-10 10],[1 1], 'r:');
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('x_1[n] = 1+2n', 'Location', 'best');
```

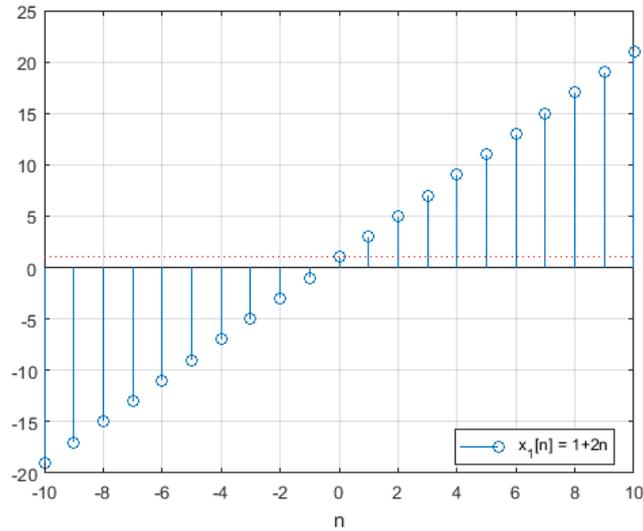


Figura 24. Representación gráfica de  $x_3[n]$  y su nivel de *offset*.

d) Vemos que  $x_4[n]$  es una señal digital definida en dos intervalos. Lo primero que hacemos es representar gráficamente la señal:

```
>> n = -20:1:20;
>> m = n(1):1:-1;
>> x41 = zeros(size(m));
>> m = 0:1:n(end);
>> x42 = (1./2).^m;
>> x4 = [x41 x42];
>> figure;
>> stem(n,x4);
>> axis([-20 20 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> ylabel('x4[n]');
```

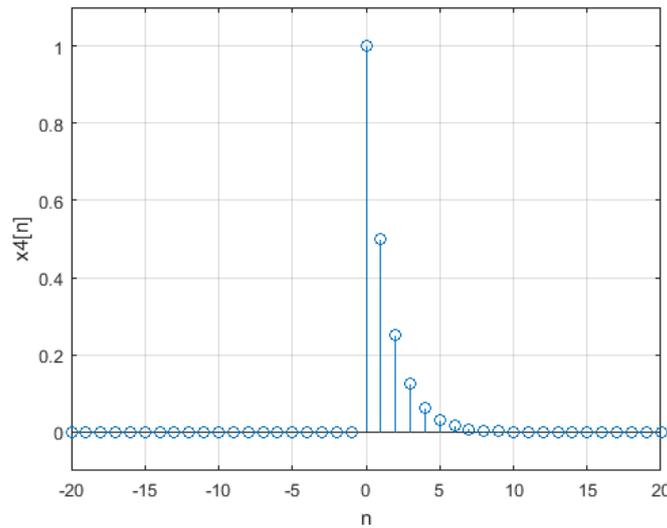


Figura 25. Representación gráfica de  $x_4[n]$ .

Se observa que  $x_4[n]$  vale 0 para todo valor negativo de  $n$ , y que, desde  $n = 0$  y a medida que  $n$  aumenta, tiende asintóticamente a 0 al ritmo de una exponencial decreciente. Así, podemos intuir que su *offset* será un valor finito entre 0 y 1 (de hecho, muy probablemente, será igual a 0):

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_4[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \sum_{n=-N}^{-1} 0 + \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (99)$$

Al llegar a este punto, se observa que  $\sum_{n=0}^N (1/2)^n$  es una serie geométrica de razón  $1/2$ .

Por tanto, ya sabemos cómo calcular  $\sum_{n=0}^N (1/2)^n$ :

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^N} \quad (100)$$

Así, aplicando en (99) el resultado de (100), ya podemos completar el cálculo de  $\mu_4$ :

$$\mu_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left(2 - \frac{1}{2^N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{2N+1} = 0 \quad (101)$$

Y, ahora, calculamos el *offset* de  $x_4[n]$  en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ :

$$\mu_{40}^{99} = \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{100} \left( \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{99}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{50} \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) \cong 0.02 \quad (102)$$

Y, en último lugar, comprobamos los resultados mediante MATLAB y añadimos el nivel de *offset* de  $x_4[n]$  a su representación gráfica:

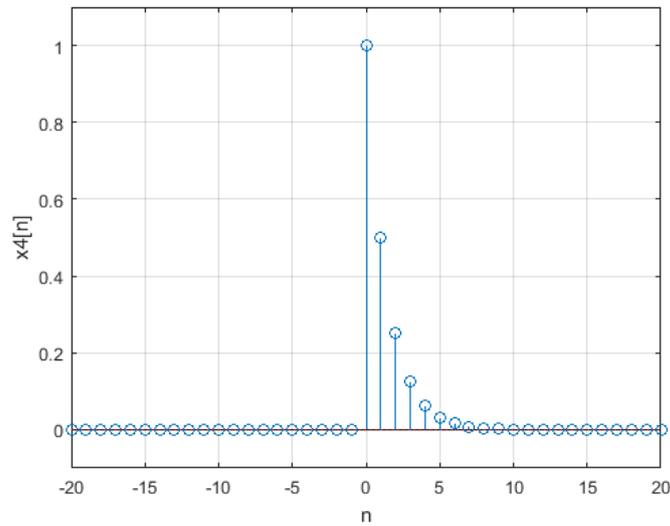


Figura 26. Representación gráfica de  $x_4[n]$  y su nivel de *offset*.

```
>> syms m N integer;
>> symsum((1/2)^m,m,0,N)

ans =

2 - (1/2)^N

>> limit((1/(2*N+1))*symsum((1/2)^m,m,0,N),N,+Inf)

ans =

0

>> n = 0:1:99;
>> m = n(1):1:-1;
>> x41 = zeros(size(m));
>> m = 0:1:n(end);
>> x42 = (1./2).^m;
>> x4 = [x41 x42];
>> mean(x4)

ans =

0.0200

>> hold on;
>> plot([-20 20],[0 0], 'r:');
```

## 5.12. Ejemplo 12

### Enunciado

Para cada una de señales definidas en el enunciado del Ejemplo 11, se pide calcular los siguientes parámetros:

- Su energía y su potencia media.
- Su energía y su potencia media en  $t \in [0,2]$ , si la señal es analógica.
- Su energía y su potencia media en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ , si la señal es digital.

**Solución**

a) Observando su representación gráfica en la Figura 16 del Ejemplo 10, ya intuimos que  $x_1(t)$  tendrá energía infinita (puesto que tiende  $x_1(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 1$ ) y, muy probablemente, potencia media finita (puesto que  $|x_1(t)| < 1$ ).

En todo caso, calculamos la energía de  $x_1(t)$ :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1+e^{-t}} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+e^{-t}} \right)^2 dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^t}{1+e^t} \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{e^t}{1+e^t} + \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} dt = [\ln(1+e^t)]_{-\infty}^{+\infty} - \left[ \frac{e^t}{1+e^t} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \\
 &= \underbrace{\ln(1+e^\infty)}_{\infty} - \underbrace{\ln(1+e^{-\infty})}_0 - \underbrace{\frac{e^\infty}{1+e^\infty}}_1 + \underbrace{\frac{e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}}_0 \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{103}$$

Y, para el cálculo de la potencia media de  $x_1(t)$ , aprovechamos el cálculo de la integral que ya hemos realizado en (103):

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_1}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{[\ln(1+e^t)]_{-T}^T - \left[ \frac{e^t}{1+e^t} \right]_{-T}^T}{2T} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^T) - \ln(1+e^{-T}) - \frac{e^T}{1+e^T} + \frac{e^{-T}}{1+e^{-T}}}{2T} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^T) - \ln\left(\frac{1+e^T}{e^T}\right) - \frac{e^T}{1+e^T} + \frac{1}{1+e^T}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^T) - \frac{1-e^T}{1+e^T}}{2T} = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T - \frac{1-e^T}{1+e^T}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1-e^T}{2T+2Te^T} = \frac{1}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-e^T}{2Te^T} = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{104}$$

Comprobamos ambos resultados con MATLAB:

```

>> syms x1(t) T;
>> x1(t) = 1/(1+exp(-t));
>> int(abs(x1(t))^2,t,-Inf,+Inf)

ans =

Inf

>> limit(int(abs(x1(t))^2,t,-T,+T)/(2*T),T,+Inf)

ans =

1/2

```

Respecto de la energía y la potencia media de  $x_1(t)$  en  $t \in [0,2]$ , claramente, ambos valores serán finitos. Calculamos  $E_{1_0}^2$ :

$$E_{1_0}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt = \int_0^2 |x_1(t)|^2 dt = [\ln(1 + e^t)]_0^2 - \left[ \frac{e^t}{1 + e^t} \right]_0^2 = \quad (105)$$

$$\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^0) - \frac{e^2}{1 + e^2} + \frac{e^0}{1 + e^0} = \ln\left(\frac{1 + e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{1 + e^2} + \frac{1}{2} \cong 1.0530$$

Y calculamos  $P_{1_0}^2$  aprovechando el resultado obtenido en (105):

$$P_{1_0}^2 = \frac{E_{1_0}^2}{2 - 0} = \frac{E_{1_0}^2}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1 + e^2}{2}\right) - \frac{e^2}{1 + e^2} + \frac{1}{2}}{2} \cong 0.5265 \quad (106)$$

Comprobamos ambos resultados con MATLAB:

```
>> int(abs(x1(t))^2,t,0,2)
ans =
log(exp(-2)/2 + 1/2) - 1/(exp(-2) + 1) + 5/2
>> log(exp(-2)/2 + 1/2) - 1/(exp(-2) + 1) + 5/2
ans =
1.0530
>> (log((1+exp(2))/2) - exp(2)/(1+exp(2)) + 1/2)/2
ans =
0.5265
```

b) Observando la expresión de  $x_2[n]$ , ya intuimos que tanto su energía como su potencia media serán infinitas, puesto que la señal crece indefinidamente tanto para valores muy positivos como muy negativos de  $n$ . Calculamos la energía de  $x_2[n]$ :

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \right)^2 = \quad (107)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{16}n^8 - \frac{1}{4}n^6 + \frac{1}{4}n^4 \right) = \frac{1}{16} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^8 - \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^6 + \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^4 =$$

$$\frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} n^8 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^6 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \rightarrow \infty$$

Se ve claramente que el cálculo de la ecuación (107) tiende a infinito, debido a que hemos topado con tres sumatorios infinitos de potencias. El resultado total viene regido por el término dominante del sumatorio de la potencia de mayor grado (que es  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^8$ ), que sabemos que es de orden 9:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^8 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n^8 = \lim_{N \rightarrow \infty} aN^9 \rightarrow \infty \quad (108)$$

Y calculamos la potencia media de  $x_2[n]$  aprovechando el resultado ilustrado en (108):

$$P_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_2}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N n^8}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha N^9}{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} N^8 \rightarrow \infty \quad (109)$$

Comprobamos ambos resultados con MATLAB:

```
>> syms m N integer;
>> symsum(( (1/4)*m^4 - (1/2)*m^2 )^2, m, -Inf, +Inf)

ans =

Inf

>> limit(symsum(((1/4)*m^4 - (1/2)*m^2)^2), m, -N, +N) / (2*N+1), N, +Inf)

ans =

Inf
```

Respecto de la energía y la potencia media de  $x_2[n]$  en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ , claramente, ambos valores serán muy elevados, pero finitos. A fin de no repetir una y otra vez los mismos procedimientos, los calculamos directamente con MATLAB:

```
>> n = 0:1:99;
>> x2 = (1./4).*n.^4 - (1./2).*n.^2;
>> sum(abs(x2).^2)

ans =

6.6327e+15

>> mean(abs(x2).^2)

ans =

6.6327e+13
```

Y, por tanto:

$$E_{2_0}^{99} = 6.63 \cdot 10^{15} \quad (110)$$

$$P_{2_0}^{99} = 6.63 \cdot 10^{13} \quad (111)$$

c) De nuevo, observando la expresión de  $x_3[n]$ , ya intuimos que tanto su energía como su potencia media también serán infinitas, puesto que  $x_3[n]$  tampoco está acotada en amplitud. Y también que su energía y su potencia media en  $n \in \{0, \dots, 99\}$  serán, de nuevo, valores muy elevados, pero finitos.

Así, calcularemos directamente los cuatro parámetros con MATLAB:

```
>> syms m N integer;
>> symsum((1+2*m)^2, m, -Inf, +Inf)

ans =

Inf

>> limit(symsum((1+2*m)^2), m, -N, +N) / (2*N+1), N, +Inf)

ans =
```

```

Inf

>> n = 0:1:99;
>> x3 = 1+2.*n;
>> sum(abs(x3).^2)

ans =

    1333300

>> mean(abs(x3).^2)

ans =

    13333
    
```

Y, por tanto:

$$E_3 \rightarrow \infty \quad (112)$$

$$P_3 \rightarrow \infty \quad (113)$$

$$E_{3_0}^{99} = 1333300 \quad (114)$$

$$P_{3_0}^{99} = 13333 \quad (115)$$

d) En el caso de  $x_4[n]$ , definida por intervalos en la ecuación (88), vemos que sí está acotada en amplitud y, además, que tiende a 0 a medida que  $n$  tiende a  $\infty$  a ritmo de una exponencial decreciente. Esto nos permite intuir que se trata de una señal cuya energía es finita y, por lo tanto, cuya potencia media será igual a 0.

Empezamos calculando la energía de  $x_4[n]$ :

$$E_4 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_4[n]|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \left( \frac{1}{2} \right)^n \right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = \frac{4}{3} \quad (116)$$

Se observa que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n$  es una serie geométrica infinita de razón  $\frac{1}{4}$ . Y **toda serie geométrica infinita converge a un resultado finito si el valor absoluto de su razón es menor que 1 ( $|r| < 1$ )**. Esto se debe a que el último término de la serie es la razón elevada a  $\infty$ , y, si el valor absoluto de la razón es menor que 1, ese término se anula:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n = \frac{1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4} \right)^\infty}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \quad (117)$$

Y, así, la potencia media de  $x_4[n]$  es:

$$P_4 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_4}{2N + 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3}}{2N + 1} = 0 \quad (118)$$

Comprobamos ambos resultados con MATLAB:

```

>> syms m N integer;
>> symsum((1/2)^m)^2, m, 0, +Inf)

ans =

    4/3
    
```

```
>> limit(symsum((1/2)^m)^2,m,0,N)/(2*N+1),N,+Inf)
ans =
0
```

Para acabar, obtenemos con MATLAB la energía y la potencia media de  $x_4[n]$  en  $n \in \{0, \dots, 99\}$ :

```
>> n = 0:1:99;
>> x4 = (1./2).^n;
>> sum(abs(x4).^2)
ans =
1.3333
>> mean(abs(x4).^2)
ans =
0.0133
```

Así pues:

$$E_{40}^{99} \cong 1.3333 \quad (119)$$

$$P_{40}^{99} \cong 0.0133 \quad (120)$$

### 5.13. Ejemplo 13

#### Enunciado

Se pide definir las siguientes señales:

- $u(t - t_0)$  y  $u[n - n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(t + t_0)$  y  $u[n + n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(-t)$  y  $u[-n]$ .
- $u(-t - t_0)$  y  $u[-n - n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(-t + t_0)$  y  $u[-n + n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(at)$  y  $u[bn]$ , para  $a, b > 0$ , siendo  $a \in \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{Q}$ .
- $u(at - t_0)$  y  $u[bn - n_0]$ , para  $a, b, t_0, n_0 > 0$ , siendo  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

Además, también se pide representarlas para  $t_0 = 5/2$ ,  $n_0 = 7$ ,  $a = 2$  y  $b = 2/3$ .

#### Solución

- a) Definimos  $u(t - t_0)$  y  $u[n - n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } (t - t_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (t - t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0 \\ 1 & \text{para } t \geq t_0 \end{cases} \quad (121)$$

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para } (n - n_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (n - n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_0 \\ 1 & \text{para } n \geq n_0 \end{cases} \quad (122)$$

Como era de esperar,  $u(t - t_0)$  y  $u[n - n_0]$  no son sino  $u(t)$  y  $u[n]$  atrasadas  $t_0$  segundos y  $n_0$  muestras, respectivamente.

b) Definimos  $u(t + t_0)$  y  $u[n + n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } (t + t_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (t + t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < -t_0 \\ 1 & \text{para } t \geq -t_0 \end{cases} \quad (123)$$

$$u[n + n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para } (n + n_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (n + n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < -n_0 \\ 1 & \text{para } n \geq -n_0 \end{cases} \quad (124)$$

Como era de esperar,  $u(t + t_0)$  y  $u[n + n_0]$  no son sino  $u(t)$  y  $u[n]$  adelantadas  $t_0$  segundos y  $n_0$  muestras, respectivamente.

c) Definimos  $u(-t)$  y  $u[-n]$ :

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & \text{para } (-t) < 0 \\ 1 & \text{para } (-t) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t > 0 \\ 1 & \text{para } t \leq 0 \end{cases} \quad (125)$$

$$u[-n] = \begin{cases} 0 & \text{para } (-n) < 0 \\ 1 & \text{para } (-n) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n > 0 \\ 1 & \text{para } n \leq 0 \end{cases} \quad (126)$$

Como era de esperar,  $u(-t)$  y  $u[-n]$  no son sino resultantes de la reflexión horizontal de  $u(t)$  y  $u[n]$ , respectivamente.

d) Definimos  $u(-t - t_0)$  y  $u[-n - n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$u(-t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } (-t - t_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (-t - t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t > -t_0 \\ 1 & \text{para } t \leq -t_0 \end{cases} \quad (127)$$

$$u[-n - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para } (-n - n_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (-n - n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n > -n_0 \\ 1 & \text{para } n \leq -n_0 \end{cases} \quad (128)$$

Vemos que  $u(-t - t_0)$  y  $u[-n - n_0]$  son  $u(-t)$  y  $u[-n]$  adelantadas  $t_0$  segundos y  $n_0$  muestras, respectivamente.

e) Definimos  $u(-t + t_0)$  y  $u[-n + n_0]$ , para  $t_0, n_0 > 0$ , siendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$u(-t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } (-t + t_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (-t + t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t > t_0 \\ 1 & \text{para } t \leq t_0 \end{cases} \quad (129)$$

$$u[-n + n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para } (-n + n_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (-n + n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n > n_0 \\ 1 & \text{para } n \leq n_0 \end{cases} \quad (130)$$

Vemos que  $u(-t + t_0)$  y  $u[-n + n_0]$  son  $u(-t)$  y  $u[-n]$  atrasadas  $t_0$  segundos y  $n_0$  muestras, respectivamente.

f) Definimos  $u(at)$ , para  $a > 0$ , siendo  $a \in \mathbb{R}$ :

$$u(at) = \begin{cases} 0 & \text{para } (at) < 0 \\ 1 & \text{para } (at) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t \geq 0 \end{cases} = u(t) \quad (131)$$

Vemos que  $u(t)$  es insensible al escalado de su variable independiente.

Ahora, definimos  $u[bn]$ , para  $b = M$ , siendo  $M \in \mathbb{Z}$  y  $M > 1$ :

$$u[Mn] = \begin{cases} 0 & \text{para } (Mn) < 0 \\ 1 & \text{para } (Mn) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < 0 \\ 1 & \text{para } n \geq 0 \end{cases} = u[n] \quad (132)$$

Vemos que  $u[n]$  es insensible al diezmo.

Ahora, definimos  $u[bn]$ , para  $b = 1/L$ , siendo  $L \in \mathbb{Z}$  y  $L > 1$ :

$$u\left[\frac{n}{L}\right] = \begin{cases} u[n/L] & \text{para } n \in \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{para } n \notin \{m_i L\}, \forall m_i \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \notin \{0, L, 2L, 3L, 4L \dots\} \\ 1 & \text{para } n \in \{0, L, 2L, 3L, 4L \dots\} \end{cases} \quad (133)$$

Por tanto,  $u[n/L]$  vale 1 en los múltiplos enteros de  $L$  mayores o iguales que 0, y 0 en el resto.

Y, finalmente, definimos  $u[bn]$ , para  $b = M/L$ , siendo  $M, L \in \mathbb{Z}$  con  $M, L > 1$  y  $M \neq L$ . Por definición, sabemos que  $u[(M/L)n]$  es el resultado de diezmar  $u[n]$  en factor  $M$  y, después, inserirle bloques de  $L - 1$  ceros. Pero, como hemos visto en (132), el diezmo en factor  $M$  de  $u[n]$  es igual a  $u[n]$  ( $u[Mn] = u[n]$ ), de modo que  $u[(M/L)n]$  es igual a  $u[n/L]$ :

$$u\left[\frac{M}{L}n\right] = u\left[\frac{n}{L}\right] \quad (134)$$

g) Definimos  $u(at - t_0)$  para  $a, t_0 > 0$ , siendo  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$u(at - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } (at - t_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (at - t_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } t < t_0/a \\ 1 & \text{para } t \geq t_0/a \end{cases} = u\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \quad (135)$$

Vemos que  $u(at - t_0)$  es  $u(t)$  atrasada  $t_0/a$  segundos. Es importante notar que  $u(at - t_0)$  es el resultado de, primero, atrasar  $t_0$  segundos  $u(t)$  y, después, escalar horizontalmente  $u(t - t_0)$  en factor  $a$ . Si se invierte el orden de las transformaciones, escalando horizontalmente primero y atrasando después, se obtiene  $u(a(t - t_0)) = u(t - t_0)$ .

Ahora, definimos  $u[bn - n_0]$ , para  $b = M$ , siendo  $M \in \mathbb{Z}$  y  $M > 1$ , y  $n_0 > 0$ , siendo  $n_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$u[Mn - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{para } (Mn - n_0) < 0 \\ 1 & \text{para } (Mn - n_0) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } n < n_0/M \\ 1 & \text{para } n \geq n_0/M \end{cases} = u\left[n - \left\lceil \frac{n_0}{M} \right\rceil\right] \quad (136)$$

allí donde  $\lceil n_0/M \rceil$  es el menor valor entero mayor o igual que  $n_0/M$ . Por tanto, vemos que  $u[Mn - n_0]$  es  $u[n]$  atrasada  $\lceil n_0/M \rceil$  segundos. Es importante notar que  $u[Mn - n_0]$  es el resultado de, primero, atrasar  $n_0$  muestras  $u[n]$  y, después, diezmar  $u[n - n_0]$  en factor  $M$ . Si se invierte el orden de las transformaciones, diezmando primero y atrasando después, se obtiene  $u[M(n - n_0)] = u[n - n_0]$ .

Ahora, definimos  $u[bn - n_0]$ , para  $b = 1/L$ , siendo  $L \in \mathbb{Z}$  y  $L > 1$ , y  $n_0 > 0$ , siendo  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Análogamente, aquí vemos que  $u[(n/L) - n_0]$  es el resultado de, primero, atrasar  $n_0$  muestras  $u[n]$  y, después, inserirle bloques de  $L - 1$  ceros a  $u[n - n_0]$ . Tomando, pues, la definición de  $u[n - n_0]$  en (122), vemos que  $u[(n/L) - n_0]$  valdrá 0 para  $n < Ln_0$  y, para  $n \geq Ln_0$ , valdrá 1 en  $n \in \{Ln_0, Ln_0 + L, Ln_0 + 2L, Ln_0 + 3L, Ln_0 + 4L \dots\}$  y 0 en el resto (como resultado de la inserción de ceros). Así pues:

$$u\left[\frac{n}{L} - n_0\right] = \begin{cases} 0 & \text{para } n \notin \{Ln_0, L(n_0 + 1), L(n_0 + 2), L(n_0 + 3), L(n_0 + 4) \dots\} \\ 1 & \text{para } n \in \{Ln_0, L(n_0 + 1), L(n_0 + 2), L(n_0 + 3), L(n_0 + 4) \dots\} \end{cases} \quad (137)$$

Por tanto, vemos que  $u[(n/L) - n_0]$  vale 1 en los múltiplos enteros de  $L$  mayores o iguales que  $Ln_0$ , y 0 en el resto. Y aquí también sucede que, si se invierte el orden de las transformaciones, insiriendo ceros primero y atrasando después, se obtiene  $u[(n - n_0)/L] = u[(n/L) - (n_0/L)]$ .

Y, finalmente, definimos  $u[bn - n_0]$ , para  $b = M/L$ , siendo  $M, L \in \mathbb{Z}$  con  $M, L > 1$  y  $M \neq L$ , y  $n_0 > 0$ , siendo  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Por (136), sabemos que  $u[Mn - n_0] = u[n - \lceil n_0/M \rceil]$ . Entonces, puesto que  $u[(M/L)n - n_0]$  es el resultado de (en este orden) atrasar, diezmar e inserir ceros, sabemos que  $u[(M/L)n - n_0]$  se obtiene insiriéndole bloques de  $L - 1$  ceros a  $u[n - \lceil n_0/M \rceil]$ . Por

tanto, por (137), vemos que  $u[(M/L)n - n_0]$  vale 1 en los múltiplos enteros de  $L$  mayores o iguales que  $L[n_0/M]$ , y 0 en el resto:

$$u\left[\frac{M}{L}n - n_0\right] = \begin{cases} 0 & \text{para } n \notin \{L[n_0/M], L([n_0/M] + 1), L([n_0/M] + 2) \dots\} \\ 1 & \text{para } n \in \{L[n_0/M], L([n_0/M] + 1), L([n_0/M] + 2) \dots\} \end{cases} \quad (138)$$

h) Para acabar, implementamos en MATLAB las señales definidas en los apartados anteriores y las representamos gráficamente para  $t_0 = 5/2$ ,  $n_0 = 7$ ,  $a = 2$  y  $b = 2/3$ . Todas las gráficas obtenidas son mostradas en la Figura 27.

```
>> t0 = 5/2;
>> n0 = 7;
>> a = 2;
>> M = 2;
>> L = 3;
>> syms x1(t) x2(t) x3(t) x4(t) x5(t) x6(t) x7(t)
>> x1(t) = piecewise(t<t0,0,t>=t0,1); % Definimos u(t-t0)
>> x2(t) = piecewise(t<-t0,0,t>=-t0,1); % Definimos u(t+t0)
>> x3(t) = piecewise(t>0,0,t<=0,1); % Definimos u(-t)
>> x4(t) = piecewise(t>-t0,0,t<=-t0,1); % Definimos u(-t-t0)
>> x5(t) = piecewise(t>t0,0,t<=t0,1); % Definimos u(-t+t0)
>> x6(t) = piecewise(t<0,0,t>=0,1); % Definimos u(at)=u(t)
>> x7(t) = piecewise(t<(t0/a),0,t>=(t0/a),1); % Definimos u(at-t0)
>> n = -20:1:20;
>> y1 = zeros(size(n)); % Inicializamos y1 como un array de ceros
>> y1(n>=n0) = 1; % Definimos u[n-n_0]
>> y2 = zeros(size(n)); % Inicializamos y2 como un array de ceros
>> y2(n>=-n0) = 1; % Definimos u[n+n_0]
>> y3 = zeros(size(n)); % Inicializamos y3 como un array de ceros
>> y3(n<=0) = 1; % Definimos u[-n]
>> y4 = zeros(size(n)); % Inicializamos y4 como un array de ceros
>> y4(n<=-n0) = 1; % Definimos u[-n-n_0]
>> y5 = zeros(size(n)); % Inicializamos y5 como un array de ceros
>> y5(n<=n0) = 1; % Definimos u[-n+n_0]
>> y6 = zeros(size(n)); % Inicializamos y6 como un array de ceros
>> y6((rem(n,L)==0)&(n>=0)) = 1; % Definimos u[(M/L)n]=u[n/L]
>> y7 = zeros(size(n)); % Inicializamos y7 como un array de ceros
>> y7((rem(n,L)==0)&(n>=L*ceil(n0/M))) = 1; % Definimos u[(M/L)n-n_0]
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x1(t), [-10,10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('u(t-5/2)', 'Location', 'northwest');
>> title('(a)');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y1);
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('u[n-7]', 'Location', 'northwest');
>> title('(b)');
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x2(t), [-10,10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('u(t+5/2)', 'Location', 'northwest');
>> title('(c)');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y2);
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
```

```
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('u[n+7]', 'Location', 'northwest');
>> title('(d)');

:

>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x7(t), [-10,10]);
>> axis([-10 10 -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> legend('u(2t-5/2)', 'Location', 'northwest');
>> title('(m)');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,y7);
>> axis([n(1) n(end) -0.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> legend('u[(2/3)n-7]', 'Location', 'northwest');
>> title('(n)');
```

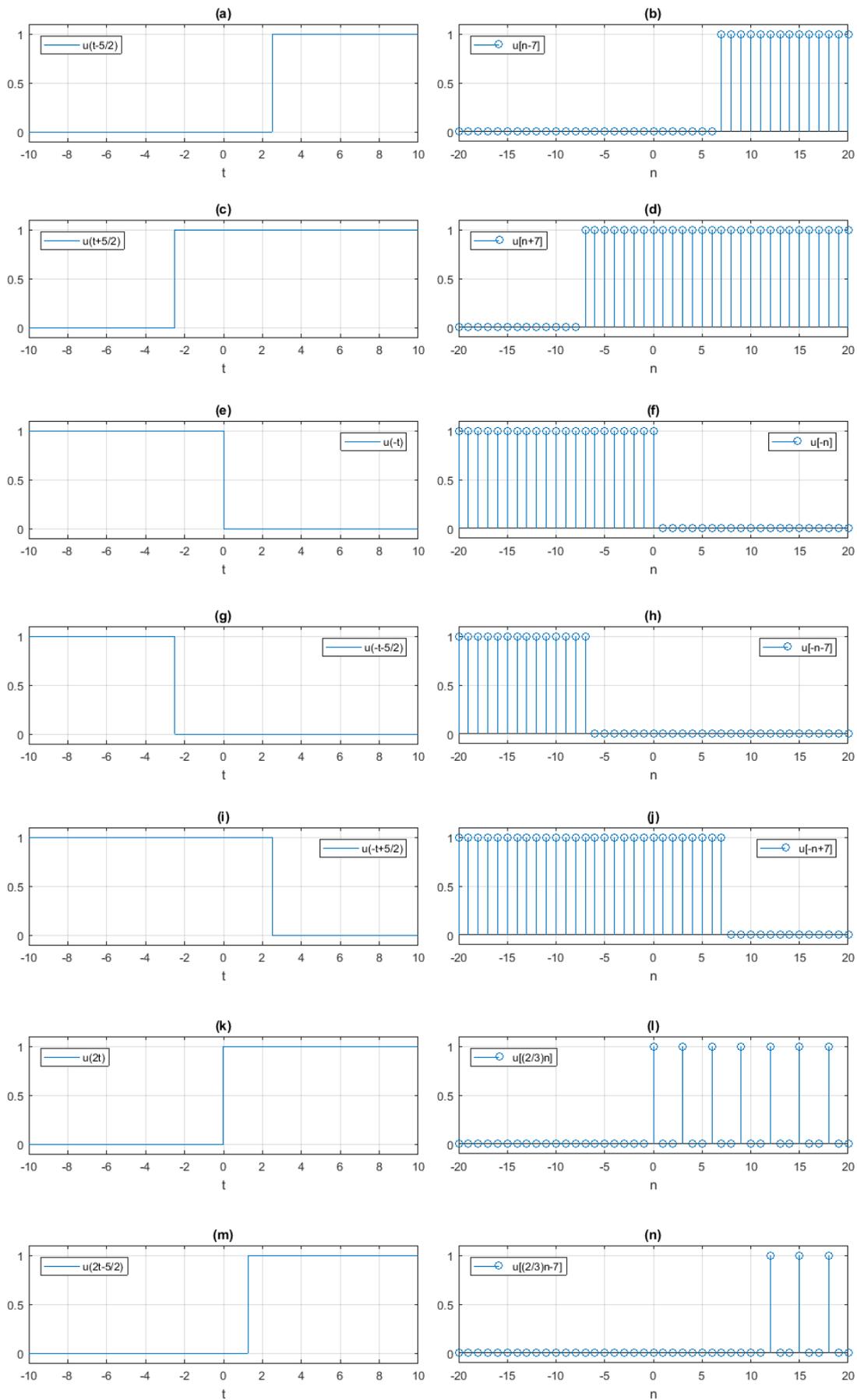


Figura 27. Representación gráfica de las señales del E.

Conviene notar el uso de la **función** `ceil`, en la definición de  $y_7$ , para calcular  $\lceil n_0/M \rceil$ , es decir, el menor valor entero mayor o igual que  $n_0/M$ . Y también del **operador lógico & (AND)**, al definir  $y_6$  e  $y_7$ . Para más detalles, se recomienda consultar el `help` de `&`, `|`, `ceil`, `floor` y `fix`.

Finalmente, queda propuesto como ejercicio definir las siguientes señales (aplicando los mismos razonamientos vistos en los apartados anteriores):

- $u(at + t_0)$  y  $u[bn + n_0]$ , para  $a, b, t_0, n_0 > 0$ , siendo  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(-at - t_0)$  y  $u[-bn - n_0]$ , para  $a, b, t_0, n_0 > 0$ , siendo  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
- $u(-at + t_0)$  y  $u[-bn + n_0]$ , para  $a, b, t_0, n_0 > 0$ , siendo  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{Q}$  y  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .

Y también representarlas gráficamente para  $t_0 = 5/2$ ,  $n_0 = 7$ ,  $a = 2$  y  $b = 2/3$ .

## 5.14. Ejemplo 15

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales analógicas, para  $t_0 = 5/2$  y  $A = 2$ :

$$x_1(t) = \frac{A}{2}\delta(t + t_0) + A\delta(t) + \frac{A}{2}\delta(t - t_0) \quad (139)$$

$$x_2(t) = -\frac{A}{3}\delta(t + 2t_0) + \frac{A}{3}\delta(t - 2t_0) \quad (140)$$

### Solución

Antes de definir y representar las señales, algunos comentarios sobre MATLAB y la delta de Dirac:

- La **función** `dirac` permite **definir simbólicamente una delta de Dirac**. Al usar la función `dirac`, la señal resultante **no está definida para el valor de la variable independiente que anula su argumento** (y vale 0 para el resto). Esto permite operar simbólicamente con la señal delta de Dirac, pero supone un problema para su representación gráfica, puesto que, por ejemplo, un `fplot` de `dirac(t)` dibuja únicamente una señal que vale 0. Es decir, que, tras el `fplot`, tenemos que añadir manualmente la flecha.
- **La flecha la añadimos mediante la función** `stem` (que ya conocemos bien, pues es la función que usamos para representar gráficamente señales digitales). Así, el comando `stem(0,1,'b^','MarkerFaceColor','b')` dibuja una flecha azul que apunta hacia arriba en la coordenada (0,1); y el comando `stem(0,-1,'bv','MarkerFaceColor','b')` dibuja una flecha roja que apunta hacia abajo en la coordenada (0,-1).
- Y, para cuando interese añadir una etiqueta para indicar el factor de escala que acompaña a la delta, podemos usar la **función** `text`, que permite **añadir etiquetas de texto en gráficas**. Así, el comando `text(0,1,' A')` añade la etiqueta «A» al lado de la coordenada (0,1); y el comando `text(0,-1,' -A')` añade la etiqueta «-A» al lado de la coordenada (0,-1).

Dicho todo lo cual, definimos ambas señales en MATLAB y las representamos gráficamente:

```
>> t0 = 5/2;
>> A = 2;
>> syms x1(t) x2(t)
>> x1(t) = (A/2)*dirac(t+t0)+A*dirac(t)+(A/2)*dirac(t-t0); % Definimos x1(t)
>> x2(t) = -(A/3)*dirac(t+(2*t0))+(A/3)*dirac(t-(2*t0)); % Definimos x2(t)
```

```
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> fplot(x1(t), [-10,10], 'b'); % Representamos x1(t)
>> hold on;
>> stem([-t0 0 t0], [A/2 A A/2], 'b^', 'MarkerFaceColor', 'b'); % Flechas arriba
>> text([-t0 0 t0], [A/2 A A/2], {' 1', ' 2', ' 1'}); % Etiquetas
>> axis([-10 10 -0.1 2.2]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a) x_1(t) = \delta(t+(5/2)) + 2\delta(t) + \delta(t-(5/2))');
>> subplot(2,1,2);
>> fplot(x2(t), [-10,10], 'r'); % Representamos x2(t)
>> hold on;
>> stem(-2*t0, -1, 'rv', 'MarkerFaceColor', 'r'); % Flecha abajo
>> stem(2*t0, 1, 'r^', 'MarkerFaceColor', 'r'); % Flecha arriba
>> text([-2*t0 2*t0], [-1 1], {' 2/3', ' 2/3'}); % Etiquetas
>> axis([-10 10 -1.2 1.2]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(b) x_2(t) = -(2/3)\delta(t+5) + (2/3)\delta(t-5)');
```

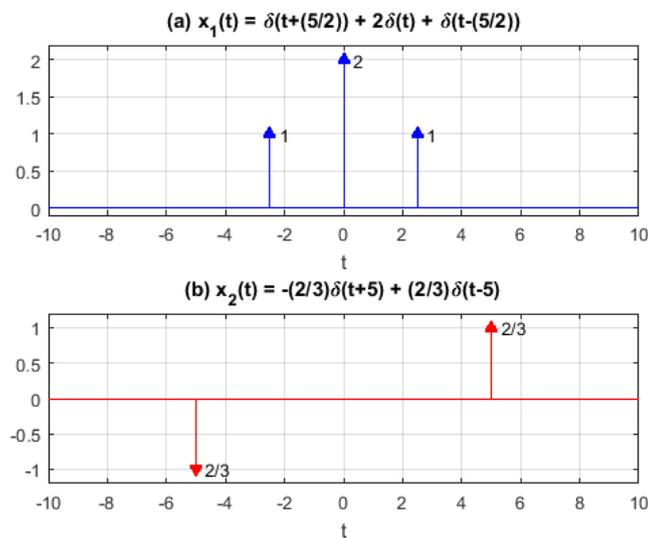


Figura 28. Representación gráfica de deltas de Dirac.

Se observa que, en la Figura 28(a), la longitud real de las flechas coincide con la magnitud del factor de escala, mientras que ese no es el caso en la Figura 28(b). En general, si se añade una etiqueta con la magnitud del factor de escala, es indiferente hacerlo de un modo o del otro.

## 5.15. Ejemplo 16

### Enunciado

Se pide representar gráficamente las siguientes señales digitales, para  $n_0 = 3$  y  $A = 2$ :

$$x_1[n] = \frac{A}{2} \delta[n + n_0] + A \delta[n] + \frac{A}{2} \delta[n - n_0] \quad (141)$$

$$x_2[n] = -\frac{A}{3} \delta[n + 2n_0] + \frac{A}{3} \delta[n - 2n_0] \quad (142)$$

**Solución**

Directamente, definimos ambas señales en MATLAB y obtenemos su representación gráfica:

```
>> n0 = 3;
>> A = 2;
>> n = -10:1:10;
>> x1 = zeros(size(n)); % De saque, x1 es un array de ceros del tamaño de n
>> x1((n==n0)|(n==0)|(n==n0)) = [A/2 A A/2]; % Definimos x1[n]
>> x2 = zeros(size(n)); % De saque, x2 es un array de ceros del tamaño de n
>> x2((n==2*n0)|(n==2*n0)) = [-A/3 A/3]; % Definimos x2[n]
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> stem(n,x1); % Representamos x1[n]
>> axis([n(1) n(end) -0.2 2.2]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(a) x_1[n] = \delta[n+3] + 2\delta[n] + \delta[n-3]');
>> subplot(2,1,2);
>> stem(n,x2); % Representamos x2[n]
>> axis([n(1) n(end) -1.1 1.1]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(b) x_2(t) = -(2/3)\delta[n+6] + (2/3) \delta[n-6]');
```

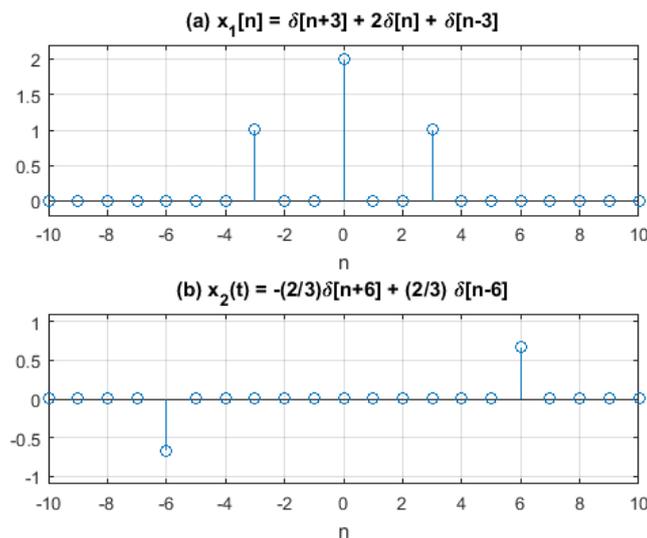


Figura 29. Representación gráfica de deltas discretas.

Conviene notar el uso del **operador lógico | (OR)**, en las definiciones de  $x_1$  y  $x_2$ , para indexar aquellos valores de  $n$  correspondientes a las amplitudes distintas de cero en  $x_1$  y  $x_2$ .

**5.16. Ejemplo 17**

**Enunciado**

Se pide caracterizar y representar gráficamente las siguientes señales:

$$x_1(t) = 3 \sin\left(4\pi\left(t + \frac{1}{8}\right)\right) \tag{143}$$

$$x_2(t) = 3 \cos(20\pi t) \quad (144)$$

$$x_3(t) = \frac{\sin(20\pi t)}{\sin(4\pi t)} \quad (145)$$

$$x_4[n] = \cos(\sqrt{2}(n-3)) \quad (146)$$

$$x_5[n] = \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \quad (147)$$

### Solución

a) Se observa que  $x_1(t)$  es una señal sinusoidal analógica de amplitud 3 y frecuencia fundamental  $4\pi \text{ rad/seg}$ , que ha sido adelantada  $1/8$  segundos:

$$x_1(t) = 3 \sin\left(4\pi\left(t + \frac{1}{8}\right)\right) = 3 \sin\left(4\pi t + \frac{4\pi}{8}\right) = 3 \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos(4\pi t) \quad (148)$$

Vemos que el adelanto de  $1/8$  segundos se traduce en una fase inicial de  $\pi/2 \text{ rad}$ , lo cual nos indica que, en realidad, estamos ante una señal sinusoidal construida mediante un coseno de fase inicial 0. Además, vemos también que el periodo fundamental de  $x_1(t)$  es de medio segundo ( $T_0 = 2\pi/4\pi = 1/2 \text{ seg}$ ).

b) Se observa que  $x_2(t)$  es una señal sinusoidal analógica de amplitud 3, frecuencia fundamental  $20\pi \text{ rad/seg}$  y fase inicial 0. Es importante notar que la frecuencia fundamental de  $x_2(t)$  es 5 veces mayor que la de  $x_1(t)$ , lo cual nos indica que el periodo fundamental de  $x_2(t)$  es, a su vez, 5 veces menor que el de  $x_1(t)$  ( $T_0 = 2\pi/20\pi = 1/10 \text{ seg}$ ). Como consecuencia de esto, ya sabemos que  $x_2(t)$  oscila 5 veces más rápido que  $x_1(t)$ , lo cual puede comprobarse en la Figura 30(a-b).

c) Vemos que  $x_3(t)$  es el resultado del cociente de dos señales sinusoidales analógicas: en el numerador, tenemos una sinusoidal de amplitud 1, frecuencia fundamental  $20\pi \text{ rad/seg}$  y fase inicial 0; y en el denominador, tenemos una sinusoidal de amplitud 1, frecuencia fundamental  $4\pi \text{ rad/seg}$  y fase inicial 0. Así, por cada 5 periodos de la sinusoidal del numerador transcurre 1 de la sinusoidal del denominador, por lo que el periodo fundamental de  $x_3(t)$  viene determinado por el de la sinusoidal del denominador ( $T_0 = 2\pi/4\pi = 1/2 \text{ seg}$ ). Y, además, como puede observarse en la Figura 30(c), cada periodo de  $x_3(t)$  contiene, a la vez, la oscilación lenta de la sinusoidal del denominador y la oscilación 5 veces más rápida de la sinusoidal del numerador.

d) Se observa que  $x_4[n]$  es una señal sinusoidal digital de amplitud 1 y frecuencia fundamental  $\sqrt{2} \text{ rad/muestra}$ , que ha sido atrasada 3 muestras:

$$x_4[n] = \cos(\sqrt{2}(n-3)) = \cos(\sqrt{2}n - 3\sqrt{2}) \quad (149)$$

Vemos que el atraso de 3 muestras se traduce en una fase inicial de  $-3\sqrt{2} \text{ rad}$ . Además, vemos también la frecuencia fundamental no es un múltiplo racional de  $2\pi$ , lo cual nos indica que  $x_4[n]$  es una señal aperiódica, como puede observarse en la Figura 30(d).

e) Se observa que  $x_5[n]$  es el resultado de elevar al cuadrado una señal sinusoidal digital de amplitud 1, frecuencia fundamental  $3\pi/5 \text{ rad/muestra}$  y fase inicial 0. De entrada, vemos que la señal sinusoidal digital que está aquí elevada al cuadrado presenta una frecuencia fundamental que es múltiplo racional de  $2\pi$ , de modo que se trata de una señal periódica, cuyo periodo fundamental es el siguiente:

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{5} = \pi \frac{3}{5} = 2\pi \frac{3}{10} \Rightarrow N_0 = 10 \text{ muestras} \quad (150)$$

Ahora bien, puesto que  $x_5[n]$  es el resultado de elevar esta señal al cuadrado, para conocer su periodo básico podemos aplicar la identidad trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$x_5[n] = \sin^2\left(\frac{3\pi}{5}n\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{6\pi}{5}n\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{6\pi}{5}n\right) \quad (151)$$

Así, vemos que  $x_5[n]$  no es sino una señal sinusoidal digital de amplitud  $-1/2$ , frecuencia fundamental  $6\pi/5 \text{ rad/muestra}$  y fase inicial 0, más una señal constante de amplitud  $1/2$ . De este modo, y por el mismo razonamiento que en (150), vemos que el periodo fundamental de  $x_5[n]$  es  $N_0 = 5 \text{ muestras}$  ( $6\pi/5 = 2\pi(3/5)$ ), lo cual puede observarse en la Figura 30(e)

f) Finalmente, definimos las señales en MATLAB y las representamos gráficamente en la Figura 30:

```
>> syms x1(t) x2(t) x3(t)
>> x1(t) = 3*sin(4*pi*(t+1/8)); % Definimos x1(t)
>> x2(t) = 3*cos(20*pi*t); % Definimos x2(t)
>> x3(t) = sin(20*pi*t)/sin(4*pi*t); % Definimos x3(t)
>> n = -10:1:10;
>> x4 = cos(sqrt(2).*(n-3)); % Definimos x4[n]
>> x5 = sin((3.*pi./5).*n).^2; % Definimos x5[n]
>> figure;
>> subplot(5,1,1);
>> fplot(x1(t), [-1,1]); % Representamos x1(t)
>> axis([-1 1 -3.3 3.3]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a) x_1(t) = 3sin(4\pi(t-1/8))');
:
:
```

En la Figura 30(c), se observa cómo, para cada periodo, el máximo y los cuatro pasos por cero coinciden con 5 los pasos por cero de la sinusoidal del numerador. Además, el máximo de cada periodo coincide también con el paso por cero de la sinusoidal del denominador. De hecho, calcular el valor de ese máximo implica lidiar con una indeterminación  $0/0$  en  $x_3(t)$  en  $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ , etc. Esta indeterminación se resuelve fácilmente mediante la regla de l'Hôpital o, incluso más rápidamente, aproximando la función seno por su argumento cuando este tiende a 0. En todo caso, vemos que las herramientas de cálculo simbólico de MATLAB resuelven directamente esta indeterminación, ahorrándonos así el tener que calcularla a mano.

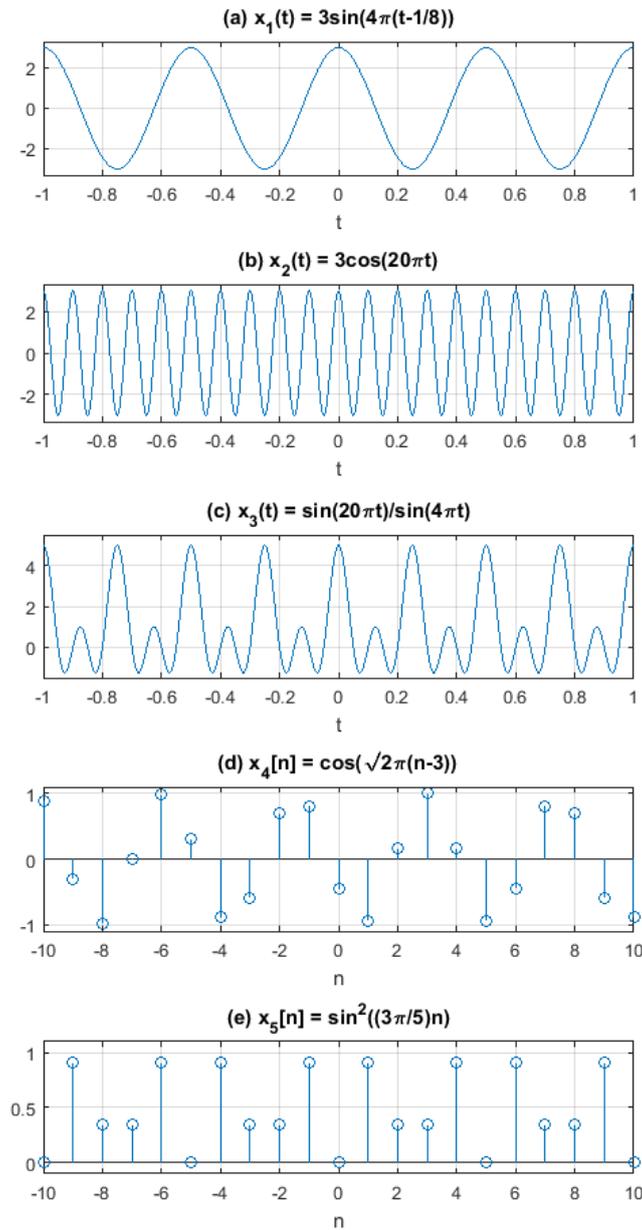


Figura 30. Representación gráfica de las señales del Ejemplo 17.

### 5.17. Ejemplo 18

**Enunciado**

Se tienen las siguientes señales sinusoidales:

$$x_1(t) = \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{152}$$

$$x_2[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) \tag{153}$$

Para cada una de ellas, se pide calcular:

- a) Sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo.

- b) Su *offset*.
- c) Su energía y su potencia media.
- d) La energía y la potencia media de sus periodos básicos.

**Solución**

a) De entrada, vemos que  $x_1(t)$  es una señal sinusoidal analógica (y, por tanto, periódica) de amplitud 1, frecuencia fundamental  $100\pi \text{ rad/seg}$  (o sea, de  $50 \text{ Hz}$  y con periodo fundamental  $T_0 = 1/50 \text{ seg}$ ) y fase inicial  $\pi/4 \text{ rad}$ .

Así, vemos claramente que  $x_1(t)$  está acotada en amplitud entre  $-1$  y  $1$ :

$$-1 \leq x_1(t) \leq 1 \tag{154}$$

Por tanto, sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo son los siguientes:

$$S_{x_1} = \max(x_1(t)) = 1 \tag{155}$$

$$I_{x_1} = \min(x_1(t)) = -1 \tag{156}$$

Por su parte,  $x_2[n]$  es una señal sinusoidal digital de amplitud 1, frecuencia fundamental  $\pi/3 \text{ rad}$  y fase inicial 0. Además, puesto que su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de  $2\pi$  (en concreto,  $2\pi/6$ ),  $x_2[n]$  es una señal periódica de periodo fundamental  $N_0 = 6$ .

De este modo, vemos que  $x_2[n]$  también está claramente acotada en amplitud entre  $-1$  y  $1$ . Sin embargo, al tratarse de una sinusoidal digital, de entrada no tiene por qué alcanzar dichas cotas, puesto que, dependiendo de los valores de su frecuencia fundamental y su fase inicial, puede no haber ningún valor entero de  $n$  que haga que el seno valga  $1$  o  $-1$ . Y de hecho, esto es lo que ocurre en  $x_2[n]$ , puesto que no hay ningún valor de  $n$  para el cual el argumento del seno sea igual a  $\pi/2 \text{ rad}$ . Lo que se observa es que el periodo básico de  $x_2[n]$  (para  $0 \leq n < 6$ ) es la siguiente secuencia de muestras:

$$[x_2[0] \ x_2[1] \ x_2[2] \ x_2[3] \ x_2[4] \ x_2[5]] = [0 \ \sqrt{3}/2 \ \sqrt{3}/2 \ 0 \ -\sqrt{3}/2 \ -\sqrt{3}/2] \tag{157}$$

Así, las cotas mínima y máxima de  $x_2[n]$  son:

$$-\sqrt{3}/2 \leq x_2[n] \leq \sqrt{3}/2 \tag{158}$$

Y, por tanto, sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo son los siguientes:

$$S_{x_2} = \max(x_2[n]) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{159}$$

$$I_{x_2} = \min(x_2[n]) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{160}$$

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> syms x1(t);
>> x1(t) = sin(100*pi*t+pi/4);
>> n = -20:1:20;
>> x2 = sin((pi./3).*n);
>> x1(1/400)

ans =
```

```

1
>> x1(-3/400)

ans =

-1

>> max(x2)

ans =

    0.8660

>> min(x2)

ans =

    0.8660

>> sqrt(3)/2

ans =

-0.8660

```

b) Respecto del *offset* de  $x_1(t)$ , claramente es igual a 0:

$$\begin{aligned} \mu_{x_1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left[100\pi \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{-T}^T}{2T} = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{100\pi \left(\cos\left(100\pi T + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-100\pi T + \frac{\pi}{4}\right)\right)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{100\pi}{2T} = 0 \end{aligned} \quad (161)$$

En general, el **offset de la señal sinusoidal analógica es igual a 0**.

Respecto del *offset* de  $x_2[n]$ , una observación interesante que puede hacerse aquí es que el **offset de toda señal periódica es siempre igual al offset de su periodo básico**, puesto que toda señal periódica está centrada verticalmente en aquel valor de amplitud al que esté centrado verticalmente su periodo básico. De este modo, habiendo explicitado el periodo básico de  $x_2[n]$  en (157), ya podemos ver que el *offset* de  $x_2[n]$  también será igual a 0, ya que la suma de las muestras de su periodo básico es 0:

$$\begin{aligned} \mu_{x_2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left(\frac{2N+1}{6} \sum_{n=0}^5 \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned} \quad (162)$$

En general, el **offset de la señal sinusoidal digital periódica es igual a 0**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y su *offset* es igual al valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal. Y si la señal sinusoidal digital no es periódica, entonces no hay forma de conocer *a priori* el valor de su *offset*.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> syms T;
>> limit((1/(2*T))*int(x1(t),t,-T,T),T,+Inf)

ans =

0

>> syms m N integer;
>> limit((1/(2*N+1))*((2*N+1)/6)*symsum(sin((pi/3)*m),m,0,5),N,+Inf)

ans =

0
```

c) Respecto de la energía de  $x_1(t)$ , es claramente infinita:

$$\begin{aligned}
 E_{x_1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x_1(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \sin^2\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{400\pi} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_{-T}^T = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{2} - \frac{1}{400\pi} \sin\left(200\pi T + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{(-T)}{2} - \frac{1}{400\pi} \sin\left(-200\pi T + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( T - \frac{1}{400\pi} \left( \sin\left(200\pi T + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-200\pi T + \frac{\pi}{4}\right) \right) \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} T = \infty
 \end{aligned} \tag{163}$$

En general, **toda señal periódica, tanto analógica como digital, es siempre de energía infinita.**

Y, al calcular la potencia media de  $x_1(t)$ , vemos que converge a un valor finito:

$$P_{x_1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{x_1}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} \tag{164}$$

En general, **la potencia media de la señal sinusoidal analógica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ( $A^2/2$ ).**

Respecto de la energía de  $x_2[n]$ , es también claramente infinita:

$$\begin{aligned}
 E_{x_2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x_2[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \sin^2\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{2N+1}{6} \sum_{n=0}^5 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right) = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1}{6} \left( 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} N = \infty
 \end{aligned} \tag{165}$$

Y, al calcular la potencia media de  $x_2[n]$ , vemos que también converge a un valor finito:

$$P_{x_2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{x_2}}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2} \tag{166}$$

En general, **la potencia media de la señal sinusoidal digital periódica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ( $A^2/2$ ), salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y su potencia media es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.**

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> limit(int(x1(t)^2,t,-T,+T),T,+Inf)
ans =
Inf
>> limit((1/(2*T))*int(x1(t)^2,t,-T,+T),T,+Inf)
ans =
1/2
>> limit((2*N+1)/6)*symsum(abs(sin(pi/3*m))^2,m,0,5),N,+Inf)
ans =
Inf
>> limit((1/(2*N+1))*((2*N+1)/6)*symsum(abs(sin(pi/3*m))^2,m,0,5),N,+Inf)
ans =
1/2
```

d) Calculamos la energía del periodo básico de  $x_1(t)$ :

$$E_{x_1}^{T_0} = \int_0^{T_0} |x_1(t)|^2 dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{400\pi} \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{50} = \frac{1}{100} - \frac{1}{400\pi} \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 0 + \frac{1}{400\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{100} \quad (167)$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal sinusoidal analógica es igual al cuadrado de su amplitud por la mitad de su periodo fundamental ( $A^2 T_0 / 2$ ).**

A continuación, calculamos la potencia media del periodo básico de  $x_1(t)$ :

$$P_{x_1}^{T_0} = \frac{E_{x_1}^{T_0}}{T_0} = 50 \frac{1}{100} = \frac{1}{2} \quad (168)$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal sinusoidal analógica es igual a la mitad del cuadrado de su amplitud ( $A^2 / 2$ ).**

Ahora, calculamos la energía del periodo básico de  $x_2[n]$ :

$$E_{x_2}^{N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=0}^5 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3 \quad (169)$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal sinusoidal digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud por la mitad de su periodo fundamental ( $A^2 N_0 / 2$ ),** salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y la energía de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Y, ahora, calculamos la potencia media del periodo básico de  $x_2[n]$ :

$$P_{x_2 0}^{N_0} = \frac{E_{x_2 0}^{N_0}}{N_0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (170)$$

En general, la potencia media del periodo básico de la señal sinusoidal digital periódica es la mitad del cuadrado de su amplitud ( $A^2/2$ ), salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y la potencia media de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> int(abs(x1(t))^2,t,0,1/50)
ans =
1/100
>> int(abs(x1(t))^2,t,0,1/50)/(1/50)
ans =
1/2
>> sum(abs(x2(1:6)).^2)
ans =
3.0000
>> mean(abs(x2(1:6)).^2)
ans =
0.5000
```

## 5.18. Ejemplo 19

### Enunciado

Se pide caracterizar y representar gráficamente las siguientes señales:

$$X_1(t) = \frac{1}{2} + e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j8\pi t} \quad (171)$$

$$X_2[n] = 1 - e^{j\frac{\pi}{2}(n-1)} - e^{j\frac{3\pi}{2}(n-1)} - e^{j2\pi n} \quad (172)$$

### Solución

a) Respecto de  $X_1(t)$ :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{1}{2} + e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j8\pi t} = e^{j4\pi t} \left( \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + 1 + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} \right) = \\ & \left( 1 + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}}_{\cos(4\pi t)} \right) e^{j4\pi t} = (1 + \cos(4\pi t))e^{j4\pi t} \end{aligned} \quad (173)$$

Vemos que, trabajando un poco con las exponenciales complejas,  $X_1(t)$  queda expresada como el producto de una señal real ( $1 + \cos(4\pi t)$ ) por una exponencial compleja de módulo 1,

frecuencia fundamental  $4\pi$  y fase inicial 0. Así, **puesto que la señal real que multiplica a la exponencial compleja es de amplitud positiva para todo  $t$ , solo aporta información a la señal módulo de  $X_1(t)$  y la señal fase de  $x_1(t)$  es directamente la fase de  $e^{j4\pi t}$ :**

$$X_1(t) = (1 + \cos(4\pi t))e^{j4\pi t} \Leftrightarrow \begin{cases} |X_1(t)| = |1 + \cos(4\pi t)| = 1 + \cos(4\pi t) \\ \mathfrak{Arg}(X_1(t)) = \mathfrak{Arg}(e^{j4\pi t}) = 4\pi t \end{cases} \quad (174)$$

Conviene notar que, si la señal real  $1 + \cos(4\pi t)$  presentase amplitudes negativas, la señal módulo sería  $|X_1(t)| = |1 + \cos(4\pi t)| \neq 1 + \cos(4\pi t)$  y deberíamos usar la señal signo para añadir la información de las amplitudes negativas de  $1 + \cos(4\pi t)$  en la señal fase de  $X_1(t)$ , de modo tal que  $\mathfrak{Arg}(X_1(t))$  sufriera incrementos de valor  $\pi$  en aquellos intervalos de  $t$  en los que la señal real  $1 + \cos(4\pi t)$  presentase valores de amplitud negativos.

b) Respecto de  $X_2[n]$ :

$$\begin{aligned} X_2[n] &= 1 - e^{j\frac{\pi}{2}(n-1)} - e^{j\frac{3\pi}{2}(n-1)} - \underbrace{e^{j2\pi n}}_1 = 1 - e^{j\frac{\pi}{2}n} \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} - e^{j\frac{3\pi}{2}n} \underbrace{e^{-j\frac{3\pi}{2}}}_j - 1 = \\ &= j \left( e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{3\pi}{2}n} \right) = j \underbrace{e^{j\pi n}}_{(-1)^n} \left( e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{2}n} \right) = \underbrace{-j}_{\frac{1}{j}} (-1)^n \left( e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right) = \\ &= (-1)^n \frac{e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}}{j} = 2(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned} \quad (175)$$

De nuevo, trabajando un poco con las exponenciales complejas, vemos que  $X_2[n]$  es una señal real, de modo que su representación gráfica será aún más sencilla, si cabe.

c) Finalmente, definimos las señales en MATLAB y las representamos gráficamente. Para hacerlo más interesante y poder comprobar la bondad de los resultados obtenidos al caracterizar las señales, definiremos y representaremos  $X_1(t)$  y  $X_2[n]$  según sus expresiones originales en (171) y (172), respectivamente:

```
>> syms X1(t)
>> X1(t) = (1/2)+exp(1j*4*pi*t)+(1/2)*exp(1j*8*pi*t); % Definimos X1(t)
>> n = -10:1:10;
>> X2 = 1-exp(1j.*(pi./2).*(n-1))-exp(1j.*3.*(pi./2).*(n-1))-...
exp(1j.*2.*pi.*n); % Definimos X2[n]
>> figure;
>> subplot(3,1,1);
>> fplot(abs(X1(t)), [-1,1]); % Representamos |X1(t)|
>> axis([-1 1 -0.1 2.1]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(a) |X_1(t)| = 1+cos(4\pit)');
>> subplot(3,1,2);
>> fplot(angle(X1(t)), [-1,1]); % Representamos Arg(X1(t))
>> axis([-1,1 -pi-0.5 pi+0.5]);
>> grid on;
>> xlabel('t');
>> title('(b) Arg(X_2(t)) = 4\pit');
>> subplot(3,1,3);
>> stem(n,X2); % Representamos X2[n]
>> axis([n(1) n(end) -2.5 2.5]);
>> grid on;
>> xlabel('n');
>> title('(c) X_2[n] = 2(-1)^nsin((\pi/2)n)');
```

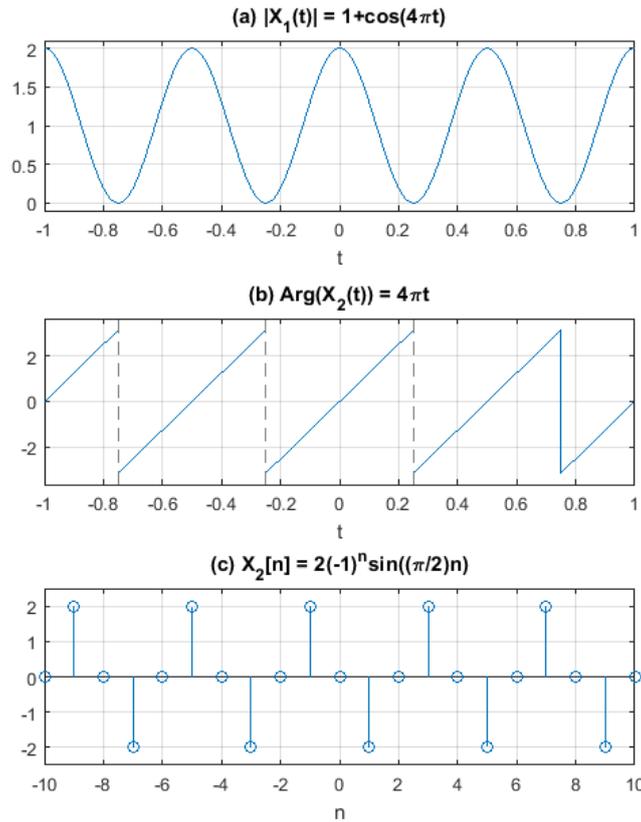


Figura 31. Representación gráfica de las señales del E.

Las líneas discontinuas verticales de la Figura 31(b) son debidas a la función `fplot`, que así representa, a veces, las discontinuidades que pueda presentar la gráfica. Aparte de este detalle, vemos que las gráficas obtenidas confirman los resultados de los apartados anteriores.

## 5.19. Ejemplo 20

### Enunciado

Se tienen las siguientes señales exponenciales complejas:

$$X_1(t) = e^{j100\pi t} \quad (176)$$

$$X_2[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n} \quad (177)$$

Para cada una de ellas, se pide calcular:

- Sus valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo.
- Su *offset*.
- Su energía y su potencia media.
- La energía y la potencia media de sus periodos básicos.

### Solución

- De entrada, vemos que  $X_1(t)$  es una señal exponencial compleja analógica (y, por tanto, periódica) de amplitud 1, frecuencia fundamental  $100\pi \text{ rad/seg}$  (o sea, de 50 Hz y con periodo

fundamental  $T_0 = 1/50 \text{ seg}$  y fase inicial 0. Así, su módulo es una señal constante de amplitud 1, mientras que su señal fase es una recta de pendiente  $100\pi$  y ordenada en el origen 0.

Por tanto, los valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo del módulo de  $X_1(t)$  son todos 1:

$$S_{|X_1|} = \max(|X_1(t)|) = I_{|X_1|} = \min(|X_1(t)|) = 1 \quad (178)$$

Mientras que los de su fase son, como en cualquier señal fase que recorra todos los posibles valores de fase:

$$S_{\text{Arg}(X_1(t))} = \max(\text{Arg}(X_1(t))) = \pi \quad (179)$$

$$I_{\text{Arg}(X_1(t))} = \min(\text{Arg}(X_1(t))) = -\pi \quad (180)$$

Por su parte,  $X_2[n]$  es una señal exponencial compleja digital de amplitud 1, frecuencia fundamental  $\pi/3 \text{ rad}$  y fase inicial 0. Además, puesto que su frecuencia fundamental es un múltiplo racional de  $2\pi$  (en concreto,  $2\pi/6$ ),  $X_2[n]$  es una señal periódica de periodo fundamental  $N_0 = 6$ . Así, su módulo es una señal constante de amplitud 1, mientras que su señal fase es una recta discretizada de pendiente  $\pi/3$  y ordenada en el origen 0.

Por tanto, los valores máximo, supremo, mínimo e ínfimo del módulo de  $X_2[n]$  son todos 1:

$$S_{|X_2|} = \max(|X_2[n]|) = I_{|X_2|} = \min(|X_2[n]|) = 1 \quad (181)$$

Mientras que los de su fase son, de nuevo:

$$S_{\text{Arg}(X_2[n])} = \max(\text{Arg}(X_2[n])) = \pi \quad (182)$$

$$I_{\text{Arg}(X_2[n])} = \min(\text{Arg}(X_2[n])) = -\pi \quad (183)$$

En general, no tiene mucho interés hablar de valores máximo y mínimo de una señal fase, puesto que **la fase no es de naturaleza lineal, sino circular** (de hecho,  $\pi \text{ rad} = -\pi \text{ rad}$ ). Aun así, podemos hacerlo en la medida en que entendamos la señal fase como una señal real cuyo recorrido en amplitud está siempre acotado entre  $-\pi$  y  $\pi$ :

$$-\pi < \text{Arg}(X(t)), \text{Arg}(X[n]) < \pi \quad (184)$$

siendo  $X(t)$  y  $X[n]$  dos señales complejas cualesquiera, analógica y digital, respectivamente.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> syms X1(t);
>> X1(t) = exp(1j*100*pi*t);
>> n = -20:1:20;
>> X2 = exp(1j.*(pi./3).*n);
>> abs(X1(1/400))
```

ans =

1

```
>> angle(X1(1/100))
```

ans =

pi

```
>> angle(X1(-1/100))
ans =
pi
>> max(abs(X2))
ans =
1
>> min(abs(X2))
ans =
1.0000
>> max(angle(X2))
ans =
3.1416
>> min(angle(X2))
ans =
-3.1416
```

b) Respecto del *offset* de  $X_1(t)$ , claramente es igual a 0:

$$\begin{aligned} \mu_{X_1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j100\pi t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{[100\pi j e^{j100\pi t}]_{-T}^T}{2T} = \\ & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{100\pi j (e^{j100\pi T} - e^{-j100\pi T})}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-100\pi \sin(100\pi T)}{T} = 0 \end{aligned} \quad (185)$$

En general, el **offset de la señal exponencial compleja analógica es igual a 0**.

Respecto del *offset* de  $X_2[n]$ , lo calculamos (se trata del límite de una serie geométrica) y vemos que también es igual a 0:

$$\begin{aligned} \mu_{X_2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^{j\frac{\pi}{3}n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}N} - e^{j\frac{\pi}{3}N}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}}} \right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}N} - e^{j\frac{\pi}{3}(N+1)}}{1 - e^{j\frac{\pi}{3}}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left( \frac{e^{j\frac{\pi}{6}} \left( e^{-j\frac{\pi}{3}(N+\frac{1}{2})} - e^{j\frac{\pi}{3}(N+\frac{1}{2})} \right)}{e^{j\frac{\pi}{6}} \left( e^{-j\frac{\pi}{6}} - e^{j\frac{\pi}{6}} \right)} \right) = \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{2N+1} = 0 \end{aligned} \quad (186)$$

En general, el **offset de la señal exponencial compleja digital periódica es igual a 0**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es real y constante y su *offset* es igual al valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal. Y si la

señal exponencial compleja digital no es periódica, entonces no hay forma de conocer *a priori* el valor de su *offset*.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> syms T;
>> limit((1/(2*T))*int(X1(t),t,-T,T),T,+Inf)

ans =

0

>> syms m N integer;
>> limit((1/(2*N+1))*symsum(exp(1j*(pi/3)*m),m,-N,N),N,+Inf)

ans =

0
```

De haber calculado por separado el *offset* del módulo y de la fase, habríamos visto que **el *offset* de las señales módulo es igual a 1, mientras que el de las señales fase es igual a 0:**

```
>> limit((1/(2*T))*int(abs(X1(t)),t,-T,T),T,+Inf)

ans =

1

>> limit((1/(2*T))*int(100*pi*t,t,-T,T),T,+Inf)

ans =

0

>> limit((1/(2*N+1))*symsum(abs(exp(1j*(pi/3)*m)),m,-N,N),N,+Inf)

ans =

1

>> limit((1/(2*N+1))*symsum((pi/3)*m,m,-N,N),N,+Inf)

ans =

0
```

c) Sabemos que la energía de  $X_1(t)$  es infinita, por tratarse de una señal periódica:

$$E_{X_1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |e^{j100\pi t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T 1^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} [t]_{-T}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T = \infty \quad (187)$$

Y, al calcular la potencia media de  $X_1(t)$ , vemos que converge a la unidad:

$$P_{X_1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{X_1}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T}{2T} = 1 \quad (188)$$

En general, **la potencia media de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud ( $A^2$ ).**

De nuevo, sabemos que la energía de  $X_2[n]$  es también infinita:

$$E_{x_2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \left| e^{j\frac{\pi}{3}n} \right|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N 1^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1}{2} \cdot 2 = \lim_{N \rightarrow \infty} 2N+1 = \infty \quad (189)$$

Y, al calcular la potencia media de  $X_2[n]$ , vemos que también converge a la unidad:

$$P_{x_2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{x_2}}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N+1}{2N+1} = 1 \quad (190)$$

En general, **la potencia media de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud ( $A^2$ )**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y su potencia media es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> limit(int(abs(X1(t))^2,t,-T,T),T,+Inf)
ans =
Inf
>> limit((1/(2*T))*int(abs(X1(t))^2,t,-T,T),T,+Inf)
ans =
1
>> limit(symsum(abs(exp(1j*(pi/3)*m))^2,m,-N,N),N,+Inf)
ans =
Inf
>> limit((1/(2*N+1))*symsum(abs(exp(1j*(pi/3)*m))^2,m,-N,N),N,+Inf)
ans =
1
```

d) Calculamos la energía del periodo básico de  $X_1(t)$ :

$$E_{X_1}^{T_0} = \int_0^{T_0} |X_1(t)|^2 dt = [t]_0^{T_0} = T_0 = \frac{1}{50} \quad (191)$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud por su periodo fundamental ( $A^2 T_0$ )**.

A continuación, calculamos la potencia media del periodo básico de  $X_1(t)$ :

$$P_{X_1}^{T_0} = \frac{E_{X_1}^{T_0}}{T_0} = \frac{T_0}{T_0} = 1 \quad (192)$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal exponencial compleja analógica es igual al cuadrado de su amplitud ( $A^2$ )**.

Ahora, calculamos la energía del periodo básico de  $X_2[n]$ :

$$E_{x_2 0}^{N_0} = \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_2[n]|^2 = \sum_{n=0}^5 1 = 6 \quad (193)$$

En general, **la energía del periodo básico de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud por su periodo fundamental ( $A^2 N_0$ )**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y la energía de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Y, ahora, calculamos la potencia media del periodo básico de  $X_2[n]$ :

$$P_{x_2 0}^{N_0} = \frac{E_{x_2 0}^{N_0}}{N_0} = \frac{6}{6} = 1 \quad (194)$$

En general, **la potencia media del periodo básico de la señal exponencial compleja digital periódica es igual al cuadrado de su amplitud ( $A^2$ )**, salvo si su frecuencia fundamental es un múltiplo entero de  $2\pi$ : en ese caso, la señal es constante y la potencia media de su periodo básico es igual al cuadrado del valor de amplitud que sea que adopten todas las muestras de la señal.

Comprobamos los resultados con MATLAB:

```
>> int(abs(X1(t))^2,t,0,1/50)
ans =
1/50
>> int(abs(X1(t))^2,t,0,1/50)/(1/50)
ans =
1
>> sum(abs(X2(1:6)).^2)
ans =
6
>> mean(abs(X2(1:6)).^2)
ans =
1
```

## 6. Demostraciones del Módulo 1

En esta sección, se proporciona el detalle de las demostraciones que aparecen citadas a lo largo el Módulo 1 bajo la forma «*Demostración X*».

### *Demostración 1:*

A continuación, haremos la demostración para el caso analógico, dejando la demostración para el caso digital propuesta como ejercicio, por ser análoga a la primera.

En primer lugar, siendo  $x(t)$  una señal analógica cualquiera, si definimos  $x_p(t)$  a partir de  $x(t)$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \Rightarrow x_p(-t) = \frac{1}{2}(x(-t) + x(-(-t))) = \\ & \frac{1}{2}(x(-t) + x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) = x_p(t) \end{aligned} \quad (195)$$

Por tanto, queda demostrado que  $x_p(t)$  es una señal par, independientemente de qué señal sea  $x(t)$ . La demostración del caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

En segundo lugar, siendo  $x(t)$  una señal analógica cualquiera, si definimos  $x_i(t)$  a partir de  $x(t)$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \Rightarrow -x_i(-t) = -\frac{1}{2}(x(-t) - x(-(-t))) = \\ & -\frac{1}{2}(x(-t) - x(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = x_i(t) \end{aligned} \quad (196)$$

Por tanto, queda demostrado que  $x_i(t)$  es una señal impar, independientemente de qué señal sea  $x(t)$ . La demostración del caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

Finalmente, sea  $x(t)$  una señal analógica cualquiera:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_i(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = \\ & \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(-t) + \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(-t) = x(t) \end{aligned} \quad (197)$$

Por tanto, queda demostrado que cualquier señal  $x(t)$  puede ser descompuesta como la suma de una señal par más una señal impar. La demostración del caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

### *Demostración 2:*

Empezamos por el caso analógico. Sea  $x(t)$  una señal analógica cualquiera y sea  $\mu_x$  su *offset*:

$$\begin{aligned}
 y(t) = x(t) + K &\Rightarrow \mu_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x(t) + K) dt = \\
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^{+T} x(t) dt + \int_{-T}^{+T} K dt \right) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt + K \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt = \quad (198) \\
 \mu_x + K \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [t]_{-T}^{+T} &= \mu_x + K \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T - (-T)}{2T} = \mu_x + K \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T}{2T} = \mu_x + K
 \end{aligned}$$

Y ahora hacemos el caso digital. Sea  $x[n]$  una señal digital cualquiera y sea  $\mu_x$  su *offset*:

$$\begin{aligned}
 y[n] = x[n] + K &\Rightarrow \mu_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N y[n] = \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N (x[n] + K) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \left( \sum_{n=-N}^N x[n] + \sum_{n=-N}^N K \right) = \quad (199) \\
 \underbrace{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n]}_{\mu_x} + K \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N 1 &= \mu_x + K \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N + 1}{2N + 1} = \mu_x + K
 \end{aligned}$$

*Demostración 3:*

Hagamos el caso analógico. Sea  $x(t)$  una señal analógica cualquiera y sea  $\mu_x$  su *offset*:

$$\begin{aligned}
 y[n] = Kx(t) &\Rightarrow \mu_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (Kx(t)) dt = \\
 K \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt &= K \mu_x \quad (200)
 \end{aligned}$$

La demostración para el caso digital es análoga y queda propuesta como ejercicio.

*Demostración 4:*

Vamos a demostrar el caso digital. Empezamos por la demostración para la energía. Sea  $x[n]$  una señal digital cualquiera y sea  $E_x$  su energía:

$$y[n] = Kx[n] \Rightarrow E_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |y[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |Kx[n]|^2 = \quad (201)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |K|^2 |x[n]|^2 = |K|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=-N}^N |x[n]|^2}_{E_x} = |K|^2 E_x$$

Y ahora hacemos la demostración de la potencia media aprovechando el resultado de la demostración para la energía. Sea  $x[n]$  una señal digital cualquiera, y sean  $E_x$  y  $P_x$  su energía y su potencia media, respectivamente:

$$y[n] = Kx[n] \Rightarrow P_y = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_y}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|K|^2 E_x}{2N+1} = |K|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{E_x}{2N+1}}_{P_x} = |K|^2 P_x \quad (202)$$

Las demostraciones para el caso de una señal analógica son análogas y quedan propuestas como ejercicio.

*Demostración 5:*

Vamos a hacer únicamente, a modo de ejemplo, la demostración para la energía en el caso analógico en que  $y(t) = x(t + t_0)$ . La demostración para la potencia media en el caso analógico, así como las demostraciones para el caso digital, son análogas y quedan propuestas como ejercicios.

Sean  $x(t)$  una señal analógica cualquiera,  $t_0$  una constante y  $E_x$  la energía de  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} y(t) = x(t + t_0) \Rightarrow E_y &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |y(t)|^2 dt = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |x(t + t_0)|^2 dt &= \left\{ \begin{array}{l} (v = t + t_0) \\ t = v - t_0 \\ dt = d(v - t_0) = dv \\ t = \pm T \Rightarrow v = \pm T - t_0 \end{array} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T+t_0}^{T-t_0} |x(v)|^2 dv = \quad (203) \\ \left\{ \begin{array}{l} (T - t_0 = U) \\ T = U + t_0 \Rightarrow -T + t_0 = -U \\ (T \rightarrow \infty) \Rightarrow (U + t_0 \rightarrow \infty) \Rightarrow (U \rightarrow \infty) \end{array} \right\} &= \lim_{U \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-U}^{+U} |x(v)|^2 dv}_{E_x} = E_x \end{aligned}$$

Se observa que el cambio de variable  $v = t + t_0$  se hace para que quede una integral definida de  $|x(v)|^2$  tal que la variable de integración ( $dv$ ) y la variable independiente de la señal cuya energía se está calculando ( $v$ ) coincidan. **Que los nombres de las variables de integración y del límite sean  $v$  y  $U$ , y no  $t$  y  $T$ , es irrelevante, ya que tanto el resultado de una integral definida como el de un límite nunca dependen de esas variables.** Además, puesto que  $t_0$  es una constante, se tiene que  $d(v - t_0) = dv - dt_0 = dv$ .

*Demostración 6:*

Vamos a hacer únicamente, a modo de ejemplo, la demostración para la energía en el caso digital. El resto de las demostraciones son análogas y quedan propuestas como ejercicios.

Sean  $x[n]$  una señal digital cualquiera y  $E_x$  la energía de  $x[n]$ :

$$\begin{aligned}
 y[n] = x[-n] \Rightarrow E_y &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |y[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[-n]|^2 = \\
 \left. \begin{aligned} &(m = -n) \\ &n = -m \\ &n = \pm N \Rightarrow m = \mp N \end{aligned} \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=N}^{-N} |x[m]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=-N}^N |x[m]|^2}_{E_x} = E_x
 \end{aligned} \tag{204}$$

Con el cambio de variable ( $m = -n$ ), el sumatorio vuelve a indexar normalmente todas las muestras de  $x[n]$ . Que los límites del sumatorio queden con el orden invertido no es ningún problema, puesto que la suma es conmutativa: podemos intercambiarlos para hacer la suma en el orden opuesto y el resultado no cambia. **Que el nombre de la variable del sumatorio sea  $m$ , y no  $n$ , es irrelevante, ya que el resultado de un sumatorio nunca depende de esa variable.**

*Demostración 7:*

Contraejemplo para el caso de la energía: sea  $x(t)$  señal analógica de duración finita, tal que su amplitud es igual a 1 para  $-1/2 \leq t \leq 1/2$  e igual a 0 para el resto de valores de  $t$ . En este caso,  $x(t)$  es de energía unitaria ( $E_x = 1$ ). Si hacemos, por ejemplo, que  $y(t) = x(2t)$ , entonces la amplitud de  $y(t)$  es igual a 1 para  $-1/4 \leq t \leq 1/4$  e igual a 0 para el resto de valores de  $t$ . Y, así, la energía de  $y(t)$  es menor que la de  $x(t)$ :  $E_y = 1/2$ .

Y, ahora, demostramos cómo la potencia media de una señal analógica es insensible a un escalado de su variable independiente. Sean  $x(t)$  una señal analógica cualquiera,  $a$  una constante real positiva y  $P_x$  la potencia media de  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}
 y(t) = x(at) \Rightarrow P_y &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |y(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(at)|^2 dt = \\
 \left\{ \begin{aligned} &(v = at) \\ &t = v/a \\ &dt = d(v/a) = (1/a)dv \\ &t = \pm T \Rightarrow v = \pm aT \end{aligned} \right\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-aT}^{aT} |x(v)|^2 \frac{1}{a} dv = \\
 \frac{1}{a} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-aT}^{aT} |x(v)|^2 dv &= \left\{ \begin{aligned} &(aT = U) \\ &T = U/a \\ &(T \rightarrow \infty) \Rightarrow (U/a \rightarrow \infty) \Rightarrow (U \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} = \\
 \frac{1}{a} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{U}{a} \int_{-U}^U |x(v)|^2 dv &= \frac{1}{a} \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{a}{2U} \int_{-U}^U |x(v)|^2 dv = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \underbrace{\int_{-U}^U |x(v)|^2 dv}_{P_x} \\
 &= P_x
 \end{aligned} \tag{205}$$

Respecto del caso digital, imaginemos, por ejemplo, la señal digital continua  $x[n] = 1$ : su energía es claramente infinita ( $E_x \rightarrow \infty$ ) y su potencia media es unitaria ( $P_x = 1$ ). Si hacemos que  $y[n] = x[3n/2]$  (o sea:  $b = 3/2$ ), estaremos, en primer lugar, eliminando dos de cada tres de sus muestras y, en segundo lugar, insiriéndole un 0 entre muestra y muestra, de modo que

$y[n] = x[3n/2] = [\dots 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 \dots]$ , cuya energía sigue siendo infinita ( $E_y \rightarrow \infty$ ) y cuya potencia media es  $P_y = 1/2$ . Vemos que, en este caso, la energía se ha mantenido igual y la potencia media se ha modificado.

Imaginemos ahora una señal digital finita  $x[n]$  tal que sus muestras sean iguales a 1 para  $n \in \{-3, \dots, 3\}$  e iguales a 0 para el resto de valores de  $n$ ; es decir, que  $x[n] = [1 1 1 1 1 1 1]$ . En este caso, la energía de  $x[n]$  es claramente  $E_x = 7$  y su potencia media es nula ( $P_x = 0$ ). Si, de nuevo, hacemos  $y[n] = x[3n/2]$ , obtenemos la señal  $y[n] = x[3n/2] = [1 0 1 0 1]$ , de modo que ahora es la energía la que se ve modificada y la potencia media la que se mantiene igual:  $E_y = 3$  y  $P_y = 0$ .

Y demostrar la excepción es casi trivial: la inserción de  $L - 1$  ceros entre las muestras de una señal ( $b = 1/L$ ) no afecta a la energía, ya que los ceros insertados no modifican el resultado del cálculo de la energía, que no es más la suma de los cuadrados de las muestras en valor absoluto de la señal (la potencia media sí se ve afectada, puesto que no implica el cálculo de una suma sin más, sino de un promedio, de modo que insertar ceros puede hacer que la potencia media disminuya).

## 7. Introducción a las Series de Fourier

El desarrollo en **serie de Fourier de una señal periódica analógica** es el siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (206)$$

allí donde  $x(t)$  es una señal periódica analógica de frecuencia fundamental  $\Omega_0$  y donde los **coeficientes de Fourier**  $c_k$  se definen como:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (207)$$

siendo  $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ , esto es, el periodo fundamental de  $x(t)$ .

Hay que tener siempre presente que, para que exista su serie de Fourier, la señal periódica analógica  $x(t)$  ha de cumplir con las que se conocen como las **condiciones de Dirichlet**:

1. La señal  $x(t)$  ha de tener un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
2. La señal  $x(t)$  ha de contener un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo.
3. La señal  $x(t)$  ha de ser absolutamente integrable en cualquier periodo; esto es:

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (208)$$

En general, todas las señales periódicas analógicas de algún interés práctico cumplen sobradamente con estas condiciones.

El desarrollo en **serie de Fourier de una señal periódica digital** es el siguiente:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\frac{2\pi}{N_0}n} \quad (209)$$

allí donde  $x[n]$  es una señal periódica analógica de periodo fundamental  $N_0$  y donde los **coeficientes de Fourier**  $c_k$  se definen como:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N_0}n} \quad (210)$$

Se observa que la serie de Fourier analógica se define infinita en (206), mientras que la serie de Fourier digital definida en (209) incluye un número finito de exponenciales complejas ( $N_0$ , para ser exactos). Esto es debido a lo que ya hemos visto en este mismo apartado acerca de la periodicidad  $2\pi$  de la frecuencia fundamental de la señal exponencial compleja digital: obsérvese que las  $N_0$  frecuencias fundamentales de las exponenciales complejas de la serie de Fourier digital son  $k2\pi/N_0, \forall k \in \{0, \dots, N_0 - 1\}$ , de modo que, para cualquier otro valor entero de  $k$  ( $k \notin \{0, \dots, N_0 - 1\}$ ), se obtendría una frecuencia fundamental separada un múltiplo entero de  $2\pi$  de alguna de estas  $N_0$  frecuencias fundamentales. De ahí que no tenga ningún sentido que la serie de Fourier incluya más que estas  $N_0$  exponenciales complejas.

Asimismo, se observa que **las fórmulas de Euler son precisamente el desarrollo en serie de Fourier de las señales sinusoidales**, que son señales periódicas y que, efectivamente, pueden expresarse como el resultado de la combinación lineal de señales exponenciales complejas.

## **Bibliografía**

Palm III, W. J. (2010). *Introduction to MATLAB for Engineers* (3rd ed.). McGraw-Hill.